Ⅳ-300　一般逆行列を用いた条件方程式の直接解法

寒河江工業高等学校　正会員　町 田 憲 一

１　はじめに

測地測量の分野では、観測方程式法により一般逆行列を導入して測地網の調整がなされている。その理由は、測地網に固定点を設けないFree Networkでは正規方程式から作られる行列が非正則のため、普通の逆行列で問題が解決しないからである[1][2]。

Free Network解法に関する内外の文献は数多く見られ、この方法は我国の土木工事用の測量網の調整にも浸透してきている[3]。

一方、条件方程式法による測量網の調整は測量学のどの参考書にも載っており一般の土木技術者にもなじみの深い方法で、種々の利点も持っている[4]。

ところが、従来の条件方程式法は正規方程式の係数行列が正則であることを前提としている。これを非正則の範囲まで拡げられないであろうか。そのためには、一般逆行列の概念を導入して条件方程式を解けばよいことが察せられる。

この考え方とその方法論の一端を示したものは既に見られる[5]。しかし、この説明はごく簡単で不十分なものであり、解の重み係数行列の計算式などに言及されていないし数値計算例も載っていない。

そこで本文では、一般逆行列を導入した条件方程式の直接解法の紹介とその補完とを目的として、最初に一般逆行列を概説し最小２乗解を与える一般逆行列の計算式をまとめ、次いでこれを用いた条件方程式の直接解とその重み係数行列の計算式などを提示し、最後に数値計算例を挙げることにする。

２　一般逆行列とは

線形方程式：${}_{n}A_{n}\,{}_{n}x_{1}={}_{n}b_{1}$（A：行列、x：未知量ベクトル、b：既知量ベクトル）において、Aが正則（$|A|\neq 0$、またはrank $A=n$ *)）のとき解xは$x=A^{-1}b$で与えられA^{-1}をAの（普通の）逆行列と呼ぶことはよく知られている。そこで次に、

$${}_{k}A_{m}\,{}_{m}x_{1}={}_{k}b_{1} \qquad (1)$$

ここに、rank $A\leqq k$

を考える。(1)に解があるならば（この必要十分条件はrank $A=$ rank Ab、Ab：Aとbの合成行列）、その解の１つを$x=A^{-}b$と表したときA^{-}をAの一般逆行列と呼ぶ。

別の定義としては、$AA^{-}A=A$を満足するA^{-}がAの一般逆行列であり、普通の逆行列の拡張と考えることができる。

そして、(1)を満足するA^{-}は必ず存在するが一義的ではなく種々のA^{-}を作ることができる。以下、本文に必要なノルム最小の最小２乗解を与えるA^{-}（これを特に偽逆行列と呼ぶことがある[6]）を示す。

*)　rank Aとは、Aに含まれる小行列の行列式の値が０でない最大次数を指し、この次数がnのときrank $A=n$と記し、Aの本質的な構造の大きさを表わす。

３　ノルム最小の最小２乗解を与える一般逆行列

(1)の１つの解について、xのノルム $\|x\|$ を一般化した場合にもノルム最小の最小２乗解の条件を満足するA^{-}は一義的に定まる。

rank $A=k$、rank $A=r$（$r<k$）の２つの場合についてのA^{-}をそれぞれA_{o}^{-}、A_{l}^{-}と記すと、これらは次式で表わせる[7]。ただし、Q：任意の正定符号行列[8]、'：転置行列を示す。

rank $A=k$の場合：

$$A_{o}^{-}=QA'(AQA')^{-1} \qquad (2)$$

rank $A=r$の場合：

$$A_{l}^{-}=(A'QA+D'D)^{-1}A'Q \qquad (3)$$

ここに、Dは次式を満足する行列である。

$$AD'=0、D'D\neq 0 \qquad (3\text{-}1)$$

あるいは、A_{l}^{-}は近似的に次式でも得られる。

$$A_{l}^{-}=(A'QA+\delta E)^{-1}A'Q \qquad (4)$$

ここに、E：単位行列、δ：正の小さい数で小さい程精度がよい。

(2)のA_{o}^{-}は、従来の条件方程式法の解に見られる形である。また、パソコンなどで組織的にA_{l}^{-}を計算するときは(4)を用いると好都合である。

４　条件方程式の直接解

次いで、３で得られる一般逆行列を用いた条件方程式の直接解などを導く。次の条件方程式において、

$$F(\hat{\ell})\equiv{}_{k}A_{m}\,v_{1}+{}_{k}w_{1}=0 \qquad (5)$$

ここに、$k<m$とし

v：残差ベクトル（$v=\hat{\ell}-\ell$）

A：残差の係数行列

$w=F(\ell)=-A\ell+C$（C：定数ベクトル）

ℓ：観測量ベクトル（重み行列：Q）

$\hat{\ell}$：観測量の最確値ベクトル

m：観測量数　，k：条件方程式数

vのノルム最小解即ちvの最小２乗解（$vQ^{-1}v=$ min.）は、３で得られる一般逆行列A^{-}を用いて次のように表わせる。

$$v=-A^{-}w \qquad (6)$$

次に、vの重み係数行列Q_{vv}を求めることになるが、その前にwの重み係数行列Q_{ww}を考える。(5)から$w=-A\ell+C$であり、ℓの重み行列Qが既知であるから重み係数伝播の法則[9]より

$$Q_{ww}=AQA' \qquad (7)$$

が得られる。従って、(6)に重み係数伝播の法則を適用し(7)を考慮すると、次のQ_{vv}が得られる。

$$Q_{vv}=A^{-}AQA'(A^{-})' \qquad (8)$$

さらに、$\hat{\ell}$の重み係数行列$Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}$は次式で表わせる。

$$Q_{\hat{\ell}\hat{\ell}}=Q-Q_{vv} \qquad (9)$$

実際にv、Q_{vv}を算出するときは、(6)、(8)のA^{-}としてrank Aに応じた(2)、(3)、(4)のA_{o}^{-}、A_{l}^{-}を用いればよい。なお、(2)、(3)、(4)のQはℓのQと同じものと

考えればよい。

また、基準分散$\hat{\sigma}_0^2$は(5)の自由度がrank Aであるから次式で表わせる。

$$\hat{\sigma}_0^2 = (v'Q^{-1}v) / \mathrm{rank}\,A \qquad (10)$$

そして、例えば$\hat{x}$の分散共分散行列$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}}$は

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{x}\hat{x}} \qquad (11)$$

で得られる。

なお、(5)がrank A＝kの場合、(2)、(6)、(8)からv、Q_{vv}は次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} v &= -A_0^- w = -QA'(AQA')\,w \\ Q_{vv} &= A_0^- AQA'(A_0^-)' \\ &= QA'(AQA')^{-1}AQA'(AQA')^{-1}AQ' \\ &= QA'(AQA')^{-1}AQ' \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

結果(12)は従来の条件方程式法の解[10]に一致する。

5 数値計算例

図１のような水準測量網の調整を本方法で実行してみる。このとき、条件方程式を全部挙げると次の３個である。

$$\left.\begin{aligned} &v1 - v2 + w1 = 0,\quad v2 - v3 + w2 = 0, \\ &v1 - v3 + w3 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (13)$$

ここに、$w1 = -(h1 - h2) = -1$, $w2 = -(h2 - h3) = -2$, $w3 = -(h1 - h3) = -3$（単位：mm）とする。(13)の中の２個が必要十分な数の条件方程式であり、これを用いるときは従来の方法で解が得られる。

(13)の３個を条件方程式とする場合を考える。すると、(13)のA、w、Qは次のようになる。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},\quad w = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix},\quad Q = E$$

このAは、第１行、２行で第３行が作れる（一次従属）から第３行の要素が０の行列と同値である。つまり、(13)のAはrank A＝r＝2＜k＝3であるから一般逆行列として(3)のA_1^-を用いることになる。以下、計算を進めると、

$$A'A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix},\ D'として\ D' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}を採る$$

とこれは(3-1)を満足する。

$$\therefore D'D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad \therefore A'A + D'D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$\therefore (A'A + D'D)^{-1} = (1/3)\,E$，故に(3)から

$$A_1^- = (A'A + D'D)^{-1}A' = 1/3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

が得られる。なお、(4)からA_1^-を求めてみると、$\delta = 10^{-5}$としδの２乗、３乗を無視すると、$(A'A + \delta E)^{-1} =$

$$\begin{bmatrix} 2+10^{-5} & -1 & -1 \\ -1 & 2+10^{-5} & -1 \\ -1 & -1 & 2+10^{-5} \end{bmatrix}^{-1} = 1/3 \begin{bmatrix} d+4/3 & d+1/3 & d+1/3 \\ d+1/3 & d+4/3 & d+1/3 \\ d+1/3 & d+1/3 & d+4/3 \end{bmatrix}$$

である（ここに、$d = 10^5$）から、(4)より(3)と同じ値のA_1^-が得られる。

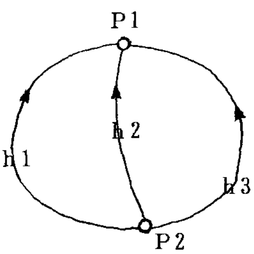
ここで、このA_1^-を用いて(6)、(8)からv、Q_{vv}を算出すると次の結果が得られる。

$$v = \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \\ -5/3 \end{bmatrix} \mathrm{mm},\quad Q_{vv} = 1/3 \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

これらのv、Q_{vv}の値は、(13)において２個の条件方程式を採用して（このときもrank A＝k＝2）(2)のA_0^-を用いた場合の結果に一致する。

そして、$\hat{\sigma}_0^2$はいずれの場合でもrank A＝2であるから(10)より次のようになる。

$$\hat{\sigma}_0^2 = v'v / \mathrm{rank}\,A = (42/9)/2 = 7/3\ \mathrm{mm}^2$$



P1，P2　：水準点
h1, h2, h3　：高低差
（矢印の方向への観測量）

観測量の分散は全部同じ

図　１　数値計算対象の水準測量網

6 おわりに

以上のように、条件方程式法にも一般逆行列を導入すると次のような利点のあることが分かる。

① 従来の最小２乗法を用いなくとも、条件方程式から直接（正規方程式が不要）最小２乗の条件を満足する解とその重み係数行列などが得られる。

② 条件方程式のrank Aの違いによって一般逆行列は異なるものの、従来の条件方程式法の正規方程式の係数行列が非正則の場合を含めた解の統一的記述ができる。

③ 測量網の調整の際に、必要十分な数以上の条件方程式が紛れ込んだ場合でも正しい解とその重み係数行列などが得られる。

参考文献

1) 現代測量学１，日本測量協会，pp. 273-293, S. 56.
2) 斎藤努：フリー平均の一考察，測地学会誌，第30巻第 3号，pp. 175-197, 1984.
3) 着工した東京湾横断道路の現場から，測量，日本測量協会，第40巻第 1号，pp. 21-34, 1990. 1.
4) 町田・森：三辺測量網の図形調整と三辺測量鎖の誤差特性，土木学会論文集，第401 号，p. 51, 1989.
5) 1)，p. 284.
6) 2)，p. 178.
7) 1)，pp. 275-285.
8) 1)，p. 218.
9) 森忠治：測量学１基礎編，丸善KK，pp. 36-39, 1979.
10) 森忠治：測量学２応用編，丸善KK，p. 347, 1981.

Appendix ：方程式(1)のxのノルム最小の最小２乗解とは、(1)が必ずしも解を持たない場合も含めて $\|x\| = (x'Rx)^{1/2} = \min.$，$(Ax - b)'S(Ax - b) = \min.$（R，S：正定符号行列）を満足する解をいう。