

IV-16

確率計画モデルの酸性雨制御問題への適用

東京大学

ジョズホブキンス大学

東京大学

正員 渡邊法美

エリス・ヒュー

正員 國島 正彦

1. はじめに

北米大陸における酸性雨問題の重要性が認識されて久しいが、最近日本でもこの問題が深刻化している。これまで、線形計画法、並びに同計画法の係数が確率変数である場合を扱う確率計画法(Stochastic Programming)が酸性雨制御の意思決定問題のために応用されてきた。本論文では、北米大陸における総 SO_2 規制量を制約条件に環境指標の向上を目的関数に持つ種々の確率計画モデルを提案、これらモデルの特性比較を行う。

2. モデルの定式化

2.1. 基本確率計画モデル

酸性雨制御の意思決定問題に適用される基本的な確率計画モデルは以下の通りである。

$$\text{最小化: } f = \sum_{j=1}^n E_j R_j \quad (1)$$

$$\text{制約条件: } \Pr[\sum_{j=1}^n E_j (1 - R_j) t_{ij} + B_i \leq D_i] \geq \alpha_i \quad i = 1, \dots, m \quad (2)$$

$$0 \leq R_j \leq 1 \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

ここで、 m は受容点数、 n は汚染源数、 E_j 、 R_j はそれぞれ第 j 番目の汚染源からの SO_2 排出量 (Kt/yr) とそこでの除去率、 B_i 、 D_i はそれぞれ第 i 番目の受容点における硫酸イオン年間蓄積背景値及び最大許容硫酸イオン年間蓄積量である。 t_{ij} は第 j 番目の汚染源と第 i 番目の受容点間の正規化移動係数、すなわち各汚染源からの各受容点における硫酸イオン蓄積量の寄与を表すが、確率的に変動する気象条件の関数となるため、これらの係数も確率変数となる。 α_i は意思決定者によってあらかじめ設定される設定確率値である。このモデルでは、各受容点における硫酸イオン蓄積量が最大許容蓄積量以下である確率が設定確率値以上であることを満たしながら、総 SO_2 規制量を最小とするような各汚染源での除去率 R_j の組み合わせが求められる。上のモデルでは、制約条件が確率的に表されているので、確率計画法の中でも特に確率制約条件計画法(Chance Constrained Programming)と呼ばれている。本研究ではカナダ・アメリカ合衆国研究諮問グループにより選択された9箇所を受容点に、アメリカ合衆国・カナダ32の主要な州・省ごとにまとめられた火力発電所を汚染源とした。また、硫酸イオン背景値(B_i)・最大許容硫酸イオン量(D_i)は、全ての受容点においてそれぞれ一律に $6(kg/ha/yr)$ 、 $20(kg/ha/yr)$ と設定

した。尚、移動係数 t_{ij} はオンタリオ環境省によって開発された統計モデルにより算出した。

式(1)、(2)、(3)は次のように書き換えられる。

$$\text{最大化: } g = \sum_{j=1}^n E_j x_j \quad (4)$$

$$\text{制約条件: } \Pr[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i] \geq \alpha_i \quad \forall i \quad (5)$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \quad \forall j \quad (6)$$

ここで、 $a_{ij} = E_j t_{ij}$ (7)、 $b_i = D_i - B_i$ (8)、 $x_j = 1 - R_j$ (9)

$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j$ が正規分布に従うと仮定すれば、式(5)はさらに次の様に変換される。

$$\Phi\left(\frac{b_i - \sum_{j=1}^n m_{ij} x_j}{(\mathbf{x}^T V_i \mathbf{x})^{1/2}}\right) \geq \alpha_i \quad \forall i \quad (10)$$

或いは

$$\sum_{j=1}^n m_{ij} x_j + \Phi^{-1}(\alpha_i)(\mathbf{x}^T V_i \mathbf{x})^{1/2} \leq b_i \quad \forall i \quad (11)$$

ここで、 $m_{ij} = E[a_{ij}]$ (a_{ij} の平均値)、 $V_i : a_{i1}, \dots, a_{in}$ の分散・共分散マトリックス、 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n] \in \mathbf{R}^n$ 及び

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^z \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt \quad (12)$$

このように確率変数の分布を仮定することにより、式(5)は式(11)或いは式(10)のように非確率等価式(deterministic equivalent)とよばれる確率項を含まない不等式に変換される。尚、式(11)において、 $\Phi^{-1}(\alpha_i) \geq 0$ 、すなわち $\alpha_i \geq 0.5$ の場合、式(4)・(11)・(6)によって構成される非確率等価モデルは、凸計画問題となる。

2.2. 本研究で提案されるモデル

米国では1989年にブッシュ政権が2000年迄に1000万tの SO_2 排出削減を提案した様に、総量規制が酸性雨対策の重要項目の一つとなっている。本節では SO_2 排出総削減量を設定した際、各受容点における硫酸イオン年間蓄積量が許容蓄積量以下である確率を様々な形で最大化するモデルを提案する。(以下表ではMと略記。)提案されるモデルは次の5つである。

M1: 各受容点における硫酸イオン蓄積量の独立性を仮定した結合確率モデル

M2: 各受容点における硫酸イオン蓄積量の従属性を考慮した結合確率モデル

M3: 最小の制約条件確率を最大化するモデル

M4: 制約条件確率の和を最大化するモデル

M5: 各受容点における平均超過硫酸イオン蓄積量の和を最大化するモデル

これらのモデルの共通制約条件は以下の様に表される。

$$\sum_{j=1}^n E_j(1-x_j) \leq S \quad (13), \quad 0 \leq x_j \leq 1 \quad \forall j \quad (14)$$

ここで S は設定 SO_2 排出総削減量を表す。各々のモデルの目的関数は

$$\begin{aligned} \text{M1: 最大化: } f_1 &= \Pr\left[\bigcap_{i=1}^m \left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\}\right] \\ &= \prod_{i=1}^m \Pr\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{M2: 最大化: } f_2 = \Pr\left[\bigcap_{i=1}^m \left\{\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right\}\right] \quad (16)$$

$$\text{M3: 最大化: } f_3 = \min_{i=1}^m \Pr\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] \quad (17)$$

$$\text{M4: 最大化: } f_4 = \sum_{i=1}^m \Pr\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\right] \quad (18)$$

$$\text{M5: 最小化: } f_5 = \sum_{i=1}^m E[q_i^-] \quad (19)$$

追加制約条件:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + q_i^+ - q_i^- = b_i, \quad q_i^+, q_i^- \geq 0 \quad \forall i \quad (20)$$

モデル1・2は全ての制約条件が同時に満たされる確率、すなわち全ての受容点における硫酸イオン蓄積量が許容値を同時に下回る確率の最大化を目的とするが、モデル1の目的関数が各制約条件が満たされる確率の積で表されるのに対し、モデル2のそれは制約条件数に等しい次元数の多次元積分で表される。各々の受容点間における硫酸イオン蓄積量の相関がない時のみ、両モデルは等しくなる。モデル5では、 q_i^+ は年間硫酸イオン蓄積量が許容値を下回る量を、 q_i^- は同蓄積量が許容値を超過する量を表し、後者の平均超過量が最小化される。従って、硫酸イオン蓄積量が許容値を下回る確率の制御を直接の目的とする他のモデルとは若干性格が異なっている。

3. 結果

表1は総 SO_2 排出削減量 (S) が 700 万トンである場合の、モデル1~5における各汚染源の最適排出除去率を示す。かなりの汚染源では全てのモデルにおいて除去率0が割当てられているが(例:汚染源22-32)、モデルによって割当除去率が大きく異なる汚染源も幾つか存在する。

表2は上記総 SO_2 排出削減量 (S) の時、各々のモデルの最適解が他のモデルにおいてどれほど効果的かを示す。すなわち表の (i, k) 成分は、第 i 番目のモデルでの最適解を第 k 番目のモデルの目的関数に代入した値を示す。この表の結果は、モデル1及び5の最適解が他のモデルでも比較的効果的であることを示している。モデル2は各受

表1: モデル1~5における各汚染源の排出除去率(%)

— $S = 700$ 万 t の場合

汚染源 \ モデル	1	2	3	4	5
1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
2	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
4	0.0	16.0	0.0	0.0	0.0
5	96.6	48.0	65.5	99.0	59.2
6	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
7	99.0	91.0	90.6	99.0	98.3
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
9	1	1	1	1	1
10	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
11	94.7	94.1	99.0	87.1	97.8
12	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
13	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
14	99.0	99.0	99.0	99.0	99.0
15	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
16	17.9	71.4	31.2	16.8	20.6
17	35.1	32.5	29.6	46.0	51.4
18	99.0	99.0	99.0	99.0	99.0
19	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
20	0.0	0.0	16.1	0.0	0.0
21	45.1	11.3	33.1	54.5	45.3
22	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
23	1	1	1	1	1
24	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
25	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
26	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
27	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
28	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
29	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
31	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
32	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

容点間の硫酸イオン蓄積量の相関を考慮し全ての制約条件を満たす確率を最大化したが、本シミュレーション条件下では、モデル2の解はモデル5においてさほど効果的ではないことが判明した。

表2: 各モデルによって得られた解の相互比較

解 \ 目的関数	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
x_1	0.533	0.607	0.826	8.41	0.327
x_2	0.429	0.673	0.811	8.21	0.491
x_3	0.466	0.633	0.884	8.28	0.412
x_4	0.531	0.582	0.792	8.41	0.333
x_5	0.523	0.620	0.837	8.39	0.310

4. 終わりに

確率計画法では、確率制約条件計画法の様に各制約条件を満たす確率を制御する考え方と、本論文のモデル5の様に、制約条件が満たされない時の超過量(或は不足量)を制御する考え方の二通りあり、どちらが問題により適しているかを判断することが困難な時も多い。本論文では SO_2 排出総削減量を設定した際、各受容点における硫酸イオン年間蓄積量が許容蓄積量以下である確率を様々な形で最大化するモデルを提案、これらのモデルより得られる解の相互比較を行った。

本論文は筆頭著者が1991年5月にジョンスホプキンス大学において取得した学位論文の一部である。

参考文献

- Charnes, A., and Cooper, W.W. (1959), "Chance-constrained programming", *Management Science* 6(1), 73-79
- Ellis, J.H. (1988) "Multiobjective mathematical programming models for acid rain control" *European Journal of Operations Research* 35(3), 365-377