Ⅳ-14 渇水の信頼性制約を有する貯水池操作ルール設計モデル

鳥取大学大学院　学生員　○高尾　秀樹
鳥取大学工学部　正会員　多々納裕一
鳥取大学工学部　正会員　小林　潔司

1. 研究の概要

渇水による信頼性を評価する際には、「生起頻度」、「期待継続期間」、「期待損失」といった指標を用いて多元的に評価することが不可欠である。そこで、本研究では渇水の「生起頻度」や「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題として、貯水池操作ルールの設計モデルを定式化する。また、本研究では得られた最適混合戦略に基づいて、最適純粋戦略の近似解を求める方法を提案する。

2. 信頼性評価指標の定式化

ここで、上述の問題を定式化するために渇水に対する信頼性評価指標を定式化する。そこでまず、時点 n における状態を (X_n, M_n) で定義する。X_n は放流可能量、M_n は時点 n までの渇水継続期間である。さらに、正常状態を S、渇水状態を F とすると渇水の「生起頻度」、「期待継続期間」、及び「期待損失」は、以下のように定式化される。

A）渇水の生起頻度 FR

渇水状態が生じてから、次に正常状態に戻るまでの期間を、ひと続きの「渇水」と見れば、渇水の生起頻度は、このひと続きの渇水が生起する確率として、次式のように定義される。

$$
\begin{aligned}
FR &= \lim_{n\to\infty} \Pr\{(X_n, M_n) \in S, (X_{n-1}, M_{n-1}) \in F\} \\
&= \sum_{(x,m)\in S} \sum_{(y,k)\in F} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \pi_{(x,m)} \\
&= \sum_{y\in F(0)} \pi_{(y,0)}
\end{aligned}
$$

B）渇水の期待継続期間 ED

渇水状態が生起したという条件の下で、次に正常状態に戻るまでの期間数の期待値であり、次式のように定式化される。

$$
\begin{aligned}
ED &= \lim_{n\to\infty} \sum_m m \Pr\{(X_n, m) \in S \\
&\qquad | (X_{n+m-1}, M_{n+m-1}) \in F, (X_{n+m}, M_{n+m}) \in S\} \\
&= \frac{\sum_m \sum_{x\in S(m)} m\pi_{(x,m)}}{\sum_{(x,m)\in S} \sum_{(y,k)\in F} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \pi_{(x,m)}}
\end{aligned}
$$

C）渇水の期待損失 EL

放流量 u に対する損失を $L(u)$ とおくと、渇水の期待損失は以下のように定義される。

$$
\begin{aligned}
EL &= \lim_{n\to\infty} L(u(x,m)) \Pr\{(X_n, M_n) \in F\} \\
&= \sum_x \sum_m \pi_{(x,m)} L(u(x,m))
\end{aligned}
$$

ここで、$P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)}$ は状態 (x,m) で放流 u を行なったときに次期に状態 (y,k) に推移する確率である。また、$\pi_{(x,m)}$ は状態 (x,m) の定常生起確率である。

3. モデルの定式化

本研究では、単一の貯水池（貯水容量 v）と、単一の評価地点（必要流量 d）とからなる流域モデルを想定する。この貯水池の操作ルール設計問題を取り上げ、次の2つの設計問題を対象として分析を行なう。

問題A　信頼性制約のない期待損失最小化問題

問題B　「生起頻度」、及び「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題

さて、信頼性制約のない期待損失最小化問題（問題A）を、L.P. モデルとして以下のように定式化しよう。

（問題A）信頼性制約のない期待損失最小化問題

$$\min_{\{Z^u_{(x,m)}\}} \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} L(u) \tag{1}$$

subject to (2)

$$\sum_u Z^u_{(y,k)} = \sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \tag{3}$$

$$\sum_{(x,m,u)} Z^u_{(x,m)} = 1 \tag{4}$$

$$\sum_u Z^u_{(x,m)} \geq 0 \tag{5}$$

X_n, M_n がそれぞれ x, m をとる場合に、放流量が u である確率を $d^u_{(x,m)}$ とおく。$D = \{d^u_{(x,m)}\}$ は、混合戦略と考えることができる。ここで、$\pi_{(x,m)} d^u_{(x,m)} \equiv Z^u_{(x,m)}$ とした。また、「生起頻度」の制約値を α、「期待継続

期間」の制約値を β とすると、問題Ｂは問題Ａの制約条件に以下に示す式 (8) 、及び式 (9) を加えたものとして定式化できる。

（問題Ｂ）「生起頻度」、及び「期待継続期間」を制約とする期待損失最小化問題

$$\min_{\{Z^{u}_{(x,m)}\}} \sum_{(x,m,u)} Z^{u}_{(x,m)} L(u) \tag{6}$$

subject to (7)

$$\sum_{(x,m,u)} Z^{u}_{(x,m)} L_F(u,m) \le \alpha \tag{8}$$

$$\sum_{(x,m,u)} Z^{u}_{(x,m)} \{L_M(u,m) - \beta L_F(u,m)\} \le 0 \tag{9}$$

$$\sum_{u} Z^{u}_{(y,k)} = \sum_{(x,m,u)} Z^{u}_{(x,m)} P_{(x,m)}{}^{u}{}_{(y,k)} \tag{10}$$

$$\sum_{(x,m,u)} Z^{u}_{(x,m)} = 1 \tag{11}$$

$$\sum_{u} Z^{u}_{(x,m)} \ge 0 \tag{12}$$

ここで、$L_F(u,m) = \chi(u < d)\chi(m = 0)$ ， $L_M(u,m) = m\chi(u \ge d)\chi(m > 0)$ とし、$\chi(\kappa)$ は κ が真のとき１、偽のとき０をとる。

問題 A の最適解は純粋戦略となることがわかっている。一方、問題 B の最適解は混合戦略となっている。この際、混合戦略を構成する純粋戦略の内、少なくとも１つは実行可能領域の内側に存在している。そこで、本研究では混合戦略を構成する純粋戦略のなかで実行可能領域の内側に存在し、さらに目的関数値を最小とする解を最適純粋戦略の近似解として採用することとした。

4. 数値計算事例

問題Ａから最適操作ルールを求めた。この結果を図-1 に示す。

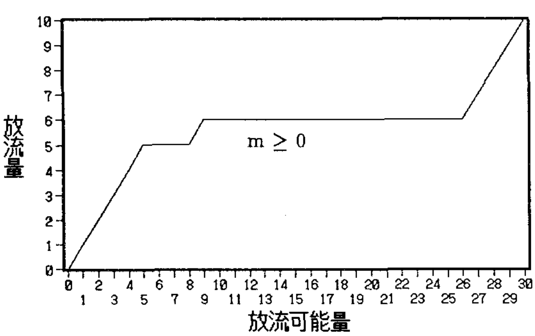

図-1:信頼性制約のない貯水池操作ルール

また、問題Ｂを対象として渇水の「生起頻度」を５年に一度と設定し「期待継続期間」を７日間 (case1) 、及び 5.21 日間 (case2) とした場合の操作ルールについて調べた。この結果を図-2 、図-3 に示す。

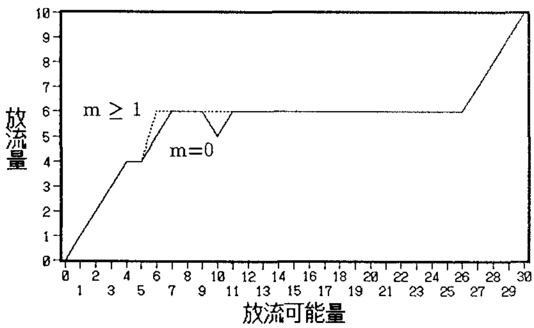

図-2:信頼性制約を有する貯水池操作ルール (case1)

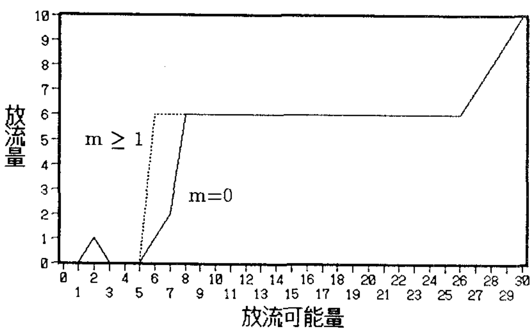

図-3:信頼性制約を有する貯水池操作ルール (case2)

図-2 、及び図-3 は、問題Ｂの解として得られた混合戦略を、上述の方法を用いて最適純粋戦略の近似解として算定したものである。

図-2 の操作ルールを見ると放流可能量が必要流量を下回る場合には、貯水量を蓄えて早く渇水状態から回復しようとする操作が行われている。また、渇水が生起していないという条件の下では放流可能量が必要流量以上あるにも関わらず、継続期間の短い渇水を頻繁に起こすことにより、「期待継続期間」をむしろ減少させるような操作ルールとなっている。図-3 の操作ルールを見ると、放流可能量が必要流量を下回る場合にはできるだけ貯水量を温存し、貯水池を空にしないという操作ルールが採用された。

5. おわりに

今後の課題として、より精度の良い最適純粋戦略の近似解を求める方法について研究をすすめる必要がある。