Ⅳ-13 系列相関性を有する流入量を受ける貯水池の操作ルール設計モデル
―渇水の継続期間を考慮して

鳥取大学工学部　○正会員　多々納裕一

1. はじめに

著者らは、渇水の継続期間を考慮した貯水池操作ルール設計モデルを提案してきた[1]。本モデルを用いると、渇水の「生起頻度」、「継続期間」、「期待損失」といった信頼性評価指標を総合的に考慮した操作ルールを求めることができる。しかしながら、このモデルは、時間的に独立かつ同一の確率分布に従う流入量を受ける貯水池を仮定しており、仮定の一般化を図ることが要請されていた。そこで、本研究では、マルコフ流入量を受ける貯水池を仮定し、渇水の継続期間を考慮した貯水池操作ルール設計モデルを提案し、その求解のアルゴリズムを示す。さらに、数値計算を行って、最適操作ルールを求めるとともに流入量の系列相関性と貯水池の最適操作ルールの関連に関して考察する。

2. 操作ルール設計モデルの定式化

本研究では、評価地点において必要流量 d の水量を補給することを要求されている単一貯水池（貯水容量 v）の操作ルールの設計問題を取り上げる。操作ルール $u(I_n, S_n, M_n)$ は時点 n における貯水池への流入量 I_n、貯水量 S_n 及び渇水継続期間 M_n に対して当該期の貯水池からの放流量 U_n を対応づける関数である。ここで、次式で定義するような時間的に同一の分布に従う１次のマルコフ連鎖をなすと仮定する。

$$\Pr\{I_{n+1} = j | I_n = i\} = \theta(j|i) \tag{1}$$

このとき、以下のような貯水池の連続式が成り立つ。

$$S_{n+1} = I_n + S_n - U_n \tag{2}$$

また、渇水継続期間 M_n は、次式のように定義される。

$$M_{n+1} = \begin{cases} M_n + 1 & \text{if } U_n < d \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{3}$$

このとき、状態ベクトルを (I_n, S_n, M_n) で定義すると、(I_n, S_n, M_n) はマルコフ連鎖をなす。この性質を利用して期待損失最小化問題として貯水池操作ルール設計問題をマルコフ決定過程の理論に基づいて次のように定式化する。

$$\begin{aligned} & v(i,s,m) + g \\ &= \min_{*}\{L(u,m) + \sum_{(j,z,k)} P_{(i,s,m^{*} \mid j,z,k)} v(j,z,k)\} \end{aligned} \tag{4}$$

ここで、(i,s,m) は当該期の状態ベクトルの値であり、(i,z,k) は次期の状態ベクトルの値である。また、$P_{(i,s,m^{*} \mid j,z,k)}$ は、状態の推移確率であり、状態 (i,s,m) のとき貯水池から u の放流を行った場合に状態 (j,z,k) へと推移する確率を与えている。$L(u,m)$ は当該期の損失を与える関数であり、説明変数として当該期の放流量 u のみならず渇水継続期間 m をも含む。この点で通常の損失関数とは異なることから、拡張型損失関数と呼ぶこととする。さらに、g は平均期待損失の最小値であり、$v(i,s,m)$ は政策の相対値と呼ばれる。$v(i,s,m) - v(j,z,k)$ は状態 (j,z,k) から出発した場合に定常状態 $n \to \infty$ における累積期待損失と状態 (i,s,m) から出発した場合に、定常状態での累積期待損失の差を表す。このとき、式 (1) ～式 (3) より、$P_{(i,s,m^{*} \mid j,z,k)}$ は次式のように与えられる。

$$\begin{aligned} P_{(i,s,m^{*} \mid j,z,k)} &= \theta(j \mid i)\chi(z = s + i - u) \\ &\cdot\{\chi(k=0)\chi(u \geq d) + \chi(k = m+1)\chi(u < d)\} \end{aligned} \tag{5}$$

ただし、$\chi(\cdot)$ は $(\cdot)$ が真のとき１、偽のとき０をとる関数である。

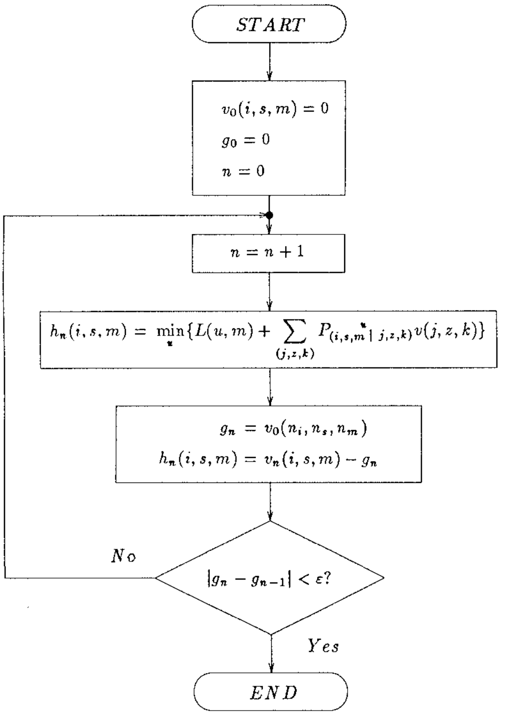
3. 貯水池操作ルールに対する信頼性評価モデル

ここでは、信頼性評価指標を定義し、その算定方法を示す。その際、操作ルール $r(i,s,m)$ に対する信頼性評価指標が拡張型損失関数をもとに算定される１期当たりの期待損失の特殊形として与えられることを示す。そこで、指標の定式化に先立ち、渇水状態 F 及び正常状態 S を次のように定義しておく。

$$\begin{cases} F = \{(i,s,m) | u(i,s,m) < d\} \\ S = \{(i,s,m) | u(i,s,m) \geq d\} \end{cases} \tag{6}$$

(1) 渇水生起確率　PF

定常状態で当該水利用システムが渇水状態にある確率であり、拡張型損失関数を次式のように特定化することによって、その期待値として算定される（$PF =$



図－１　操作ルール設計モデルの解法（逐次近似法）

$E[L_{PF}]$)。

$$L_{PF}(u,m)=\begin{cases}1 & \text{if } u<d\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{7}$$

(2) 渇水の生起頻度　FR

渇水が生起してから次に正常状態に戻るまでの一続きの期間を「渇水」と定義する。このとき、「渇水」の生起する確率が渇水の生起頻度 FRであり、PFと同様に $FR=E[L_{FR}]$ によって算定される。

$$L_{FR}(u,m)=\begin{cases}1 & \text{if } u<d, m=0\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{8}$$

(3) 渇水継続期間の期待値　EM

渇水継続期間 m の期待値であり、同様に $EM=E[L_{EM}]$ によって算定される。

$$L_{EM}(u,m)=\begin{cases}m & \text{if } u\geq d\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{9}$$

(4) 期待渇水継続期間　ED

渇水が生起したという条件の下で、次に正常状態に戻るまでの期間の期待値であり、EMと FRを用いて以下のように算定される。

$$ED=EM/FR \tag{10}$$

4. 操作ルール設計モデルの解法

マルコフ決定過程では、その解法として政策改良法 (Howard 1967) や逐次近似法 (White 1963) が用いられることが多い。政策改良法は、最も一般的に用いられる方法ではある。状態の数Nと同数の未知数を含むN本の連立一次方程式を解く必要がある。本研究の場合、状態ベクトルは (I_n,S_n,M_n) で与えられるため、それぞれの状態数を n_i,n_s,n_m とすると $N=n_i\times n_s\times n_m$（数値例では、$21\times11\times21=4581$）の状態を取り扱う必要があり、メモリー効率や精度の観点からは好ましい方法であるとはいえない。このような問題を避けるために本研究では逐次近似法を適用した。図－１に本研究における数値解法（逐次近似法）を示す。

表－１　最適操作ルールに対する信頼性評価指標

α	PF		FR		EM(日)		ED(日)	
	$\rho=0$	$\rho=0.53$	$\rho=0$	$\rho=0.53$	$\rho=0$	$\rho=0.53$	$\rho=0$	$\rho=0.53$
-0.5	0.0283	0.309	0.0162	0.0497	0.1415	1.5450	8.746	31.102
-0.3	0.0278	0.309	0.0163	0.0548	0.1391	1.5461	8.503	28.237
0.0	0.0191	0.265	0.0120	0.0684	0.0956	1.3228	7.983	19.335
0.3	0.0180	0.247	0.0124	0.1293	0.0898	1.2355	7.244	9.553
0.5	0.0127	0.240	0.0084	0.1407	0.0634	1.1999	7.534	8.529
1.0	0.0122	0.207	0.0084	0.1832	0.0611	1.0373	7.235	5.663
1.5	0.0288	0.226	0.0260	0.2147	0.1441	1.1306	5.546	5.267
2.0	0.0283	0.222	0.0260	0.2142	0.1413	1.1122	5.432	5.193

5. 数値計算事例

本研究では、流入量の系列相関性を考慮した場合 $\rho=0.53$ と考慮しない場合 $\rho=0.0$ を取り上げ、その各々のケースについて数値計算を行い、最適操作ルール並びに信頼性評価指標値を算定した。紙幅の都合により分析結果の詳細は講演時に譲るが、数値計算結果の一部を表－１に示す。その際、拡張型損失関数を次式のような関数を用いた。

$$L(u,m)=\begin{cases}(m+1)^{\alpha}(d-u)^{\beta} & \text{if } u<d,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases} \tag{11}$$

6. おわりに

本研究では数値計算を通じて以下の知見を得た。

(1) 流入量の系列相関性を考慮しなければ、最適操作ルールでは流入量と貯水量の和（放流可能量）が等しい状態に対する放流量が等しい。

(2) 流入量の系列相関性を考慮すると、最適操作ルールでは流入量が少ないほど放流可能量が等しい状態に対する放流量は少なくなる。

(3) 拡張型損失関数のパラメータαの増加にともなって、EDは減少する。

参考文献　1) 多々納, 岡田, 河合：渇水の継続期間を明示的に組み込んだ貯水池運用計画モデル，土木計画学研究・論文集、NO.9, pp. 173-180, 1991.