

III-337

複素写像関数による無限体内の孔形状の断面決定と応力、変位解析

松江工業高等専門学校	正員	浜野 浩幹
大林組技術研究所	正員	山下 幸夫
山梨大学工学部	正員	平島 健一

1. はじめに

地下構造物, 例えば, トンネル, 地下鉄, あるいは燃料地下備蓄のための構造物等を構築する場合, 構造物そのもの, および掘削過程の段階における応力, 変形状態を知ることは必須の条件である. このような任意形状構造物に対する取り扱いには有限要素法や境界要素法等の数値解析法が多用されているが, これらの数値的手法は分割数や計算時間, 精度といった問題で制約を受ける. 応力, 変位はその構造物がなんらかの関数の形で表わすことが出来れば, 複素関数論によって弾性解を求めることが出来る. 以上のことを踏まえて本研究は, 任意形状の断面形を写像関数によって表わすことを試みたものである.

2. 写像関数の決定

従来までも, 写像関数による断面形状の決定は多くの研究者によって報告されているが, ここでは Melentiev の方法によって求める. 任意形状断面内に座標系 (x, y) を設け, 座標面の孔縁およびその外部を複素変数 z で表わし, これを ζ -平面内の単位円およびその外部に変換すると写像関数 $\omega(\zeta)$ が次式のように与えられる:

$$z = x + i \cdot y = \omega(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) \zeta^{1-n} \quad (1)$$

ここに, $\zeta = \rho e^{i\theta}$ ($\rho \geq 1$) であり $\rho=1$ のとき z 平面上の孔縁が, また, $\rho > 1$ のときその外部領域が対応する. また, α_j, β_j ($j=1, 2, \dots, n$) は断面形状によって定まる係数である. この x, y は直接求めることは出来ないため $x+i y = u_k + i v_k$ と置き, 与えられた図形からこの u_k, v_k を近似計算し図形上の真値 x, y に収束させていく. このとき, u_k, v_k は座標原点で 2π を m 等分したとき次式で与えられる:

$$\left. \begin{aligned} u_k &= \sum_{j=0}^{m/2} \left\{ \alpha_j \cos\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) + \beta_j \sin\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) \right\}, \\ v_k &= \sum_{j=0}^{m/2} \left\{ \beta_j \cos\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) - \alpha_j \sin\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

また, 式中 α_j, β_j は

$$\left. \begin{aligned} \alpha_j &= \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m \left\{ u_k \cos\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) \right\}, \quad \beta_j = \frac{2}{m} \sum_{k=1}^m \left\{ u_k \sin\left(\frac{2\pi}{m} jk\right) \right\}, \\ \alpha_0 &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m u_k, \quad \beta_{m/2} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \{ (-1)^k u_k \}, \quad \beta_0 = -\sum_{k=1}^{m/2} \beta_k, \quad \beta_{m/2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

で与えられる. ただし, $j=1, 2, \dots, m/2-1$ である. ここで, 対称軸が存在すれば β_j は零に収束する.

α_j, β_j が求まれば u_k, v_k が式(2)より決定でき, これより点 $M_k (=u_k + i v_k)$ を得るが, これは, 一般に境界上にはない. そこで, これらが境界上に来ようように補正し, それより新しい u_k, v_k を求める. この操作をある誤差の範囲内になるまで繰り返すことによって最終的な u_k, v_k を求め写像関数を決定する. まず, 初期値の決め方としては Melentiev は境界上の曲率の異なる点においてそれに接する外円と内円を描きその差を直径とする小円と境界との交点を初期値に取っている. また, 補正の方法としては次の 3通りの方法を上げている. 1) 点 M_k から境界上に垂線を下ろした点を新しい補正点とする. 2) 点 M_k と原点を通る直線と境界との交点を新しい補正点とする. 3) θ の角をなす放射線に平行な直線を点 M_k から境界に引きその交点を新しい補正点とする. しかし, これは図形により使い分けなければならない, 同じような形の図形でも曲率が違ったり, 得に凹部がある場合は収束しない場合もあり一定しない欠点がある.

また、手計算を目的としているためと思われるが、初期値の決め方にも問題があると思われる。そこで、筆者等は座標点そのものを初期値とし、補正としては上記 1) の場合のものを改良した方法で計算した。

2.1. 計算例 1)

図1は凹部のある任意形断面を解析したものである。図(a)は Melentiev の方法で行なった場合であるが決められた誤差の範囲内では収束しない。ここで、誤差は原点から境界までの距離の $1/100$ とした。図(b)は初期値を境界上の点に取った場合で図に見られるように補正値が境界上に殆ど一致しており、8回で収束した。これより得られた写像関数で描いたものが図(c)で、原図形に一致していることが分かる。

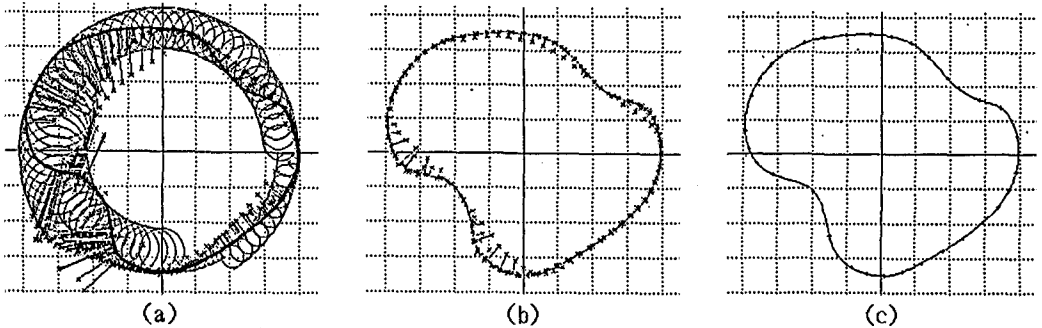


図1. 任意図形の収束状態

2.2. 計算例 2)

次に、図2に示す図形について解析した結果を示す。図(a)は収束状態を示したものであり、その写像関数の係数を7項まで表1に示す。この図形は x 軸に対称であるから β_j が零に落ちているのが認められる。これを式(1)に代入して写像関数を求め、図(b)にこの写像関数を用いて描いた図形を示す。

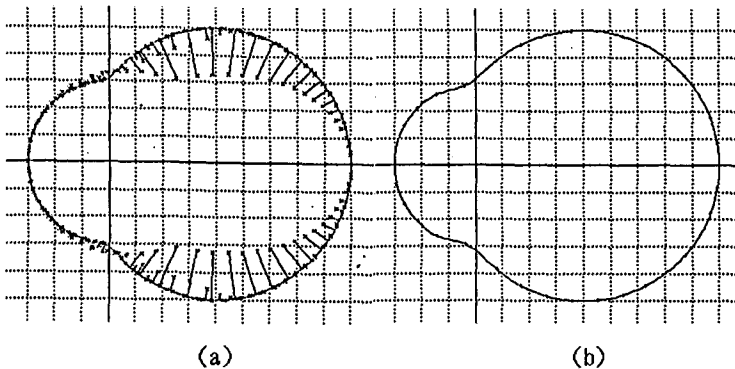


図2. 計算例 2

表 1. 写像関数

j	α_j	β_j
0	0.5379E+01	-.6939E-04
1	0.3289E+01	-.2486E-07
2	0.5646E+00	0.6568E-05
3	-.3459E+00	-.4089E-05
4	0.1291E+00	0.1079E-05
5	0.2172E-01	0.6117E-05
6	-.8197E-01	-.4962E-05
7	0.6631E-01	0.4906E-05

4. おわりに

従来までに報告されている写像関数の報告は対称断面であつたり、また、項数がきわめて少なく、一般的な形状を表示するには必ずしも十分ではない。本法では凹形断面を含む任意断面形状の写像関数を求めることが出来るため、このプログラムを応力等を計算するプログラムに組み込んでおけば、原図形の座標を入力するだけで任意構造物の応力、変位が容易に求められる。その手法は文献 2), 3) に示した解析手順を用いればよい。詳細については講演会当日に発表する。

参考文献 1) Kantorovich, L.V. & Krylov, V.I.: Approximate Methods of Higher Analysis, Interscience Pub., pp.451-478, 1964. 2) 平島, 他, 土木学会論文集, No.436/III-16, pp.37-45, 1991-9. 3) 平島, 他, 土木学会論文集, No.439/III, pp.1-8, & pp.17-26, 1991-12.