III-269　不連続境界面上の幾何学的適合条件を用いたひずみの局所化の有限要素解析

福井大学工学部　学生員　船戸慶輔
神戸大学工学部　正　員　桜井春輔

1. はじめに

変形量の増加にともない，ひずみが局所的に増大する部分があることは，古くから材料試験などにおいて確認されている．これはひずみの局所化と呼ばれ，均一変形からの分岐問題として考えられている．ここでは，そのようなひずみの局所化を考慮した有限要素法による一解析手法について示す．

2. 不連続適合条件による分岐条件式 (1)

ある物体中で定義される物理量 f について，その不連続面が存在すると幾何学的一階不連続適合条件式が，

$$\Delta f_{;i} = \beta \nu_i + \alpha_{;a}\gamma_{ab}x_{i,b} \qquad ここに,\quad \alpha = \Delta f,\quad \beta = \Delta f_{;i}n^i \tag{1}$$

と表されることが一般に知られている．ここに，γ_{ab} は計量テンソル，n_i は不連続面の法線ベクトルであり，Δ は不連続量 ($\Delta f = f^+ - f^-$) を表す．

ここで，座標系に直角直交座標を考え，ある変形状態における変位は連続であるが，その勾配については不連続であるとの条件が成り立つ場合に (1) を適用すると，変位勾配の不連続量が

$$\Delta u_{i,j} = g_i n_j = |g| m_i n_j, \qquad ここに,\quad m_i = \frac{g_i}{|g|},\quad g_i = \Delta u_{i,j}n_j \tag{2}$$

と表される．よって，ひずみ (Eular のひずみ) の不連続量は

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta u_{i,j} + \Delta u_{j,i}) = \frac{1}{2}(g_i n_j + g_j n_i) = g_i n_j = |g| m_i n_j \tag{3}$$

となる．不連続面におけるトラクションの連続性により，その差 Δt は 0 となるので，(3) を適用すると，

$$\begin{aligned}\Delta t_j &= n_i \Delta\sigma_{ij} = n_i\Delta(D_{ijkl}\varepsilon_{kl}) = n_i D_{ijkl}\Delta\varepsilon_{kl} = |g| n_i D_{ijkl} n_l m_k \\ &= |g| A_{jk} m_k = 0 \qquad ここに,\quad A_{jk} = n_i D_{ijkl} n_l\end{aligned} \tag{4}$$

と書ける．ここでは不連続面が生じても，その両側において応力－ひずみ関係を表すテンソル D_{ijkl} は変化しないものとしている．(4) より，物体中にひずみの不連続量が存在するための条件は，

$$\det A_{jk} = 0 \tag{5}$$

を満足する場合である．

3. 分岐した要素に用いられる内挿関数

以下では，ひずみの局所化を考慮した有限要素法による数値解析法についてのべる．(5) を満足する要素について，局所化を考慮した変形モードを導入するために，次のような関数を定める．

$$\begin{cases}\mathbf{M}^+_{bi}(\mathbf{x}) = \ \ m_{bi}[n_{bj}(x_j - \xi_{bj})] & \mathbf{n}_b\cdot(\mathbf{x} - \xi_b) > 0 \quad の場合\\ \mathbf{M}^-_{bi}(\mathbf{x}) = -m_{bi}[n_{bj}(x_j - \xi_{bj})] & \mathbf{n}_b\cdot(\mathbf{x} - \xi_b) < 0 \quad の場合\end{cases}$$

ここでは，分岐条件は各積分点において評価されるものとする．また，ξ_b は b 番目の局所化モードが求められた積分点である．このような関数を用いると，不連続面上での変位勾配のジャンプは

$$|\Delta u_{i,j}| = |(\mathbf{M}^+_{bi})_{,j}| = |(\mathbf{M}^-_{bi})_{,j}| = m_{bi}n_{bj}$$

と表され，不連続面におけるひずみの単位不連続量が表現できる．よって，要素内で用いられる変位の内挿関数は以下のように定めることができる．

$$u_i(\mathbf{x}) = \sum_{a=1}^{N}\delta_{ai}\mathbf{N}_a(\mathbf{x}) + \sum_{b=1}^{NL} g_b\mathbf{M}_{bi}(\mathbf{x}) \qquad ここに,\quad \mathbf{M}_{bi}(\mathbf{x}) = (1-\lambda_b)\mathbf{M}^-_{bi}(\mathbf{x}) + \lambda_b\mathbf{M}^+_{bi}(\mathbf{x}) \tag{6}$$

ここで，λ_b は各積分点における局所化モードの大きさを表すパラメータであり，非適合要素における Patch Test を満足するための条件 [2] より，$\lambda_b = \Omega^{e^-} / (\Omega^{e^+} + \Omega^{e^-})$ で求められる．ここで，Ω^{e^+}, Ω^{e^-}, はそれぞれ b 番目の不連続面によって分割される要素内の領域における + 側と − 側の領域を表すものである．

(6)の変位内挿関数により，要素内のひずみは以下のように表わされる．

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N}[\delta_{ai}\mathbf{N}_{a,j}(\mathbf{x}) + \delta_{aj}\mathbf{N}_{a,i}(\mathbf{x})] + \frac{1}{2}\sum_{b=1}^{NL} g_b[\mathbf{M}_{bi,j}(\mathbf{x}) + \mathbf{M}_{bj,i}(\mathbf{x})] \tag{7}$$

4. 有限要素法の定式化

(7)で示される要素内のひずみを表す式を

$$\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_1(\mathbf{x})\delta + \mathbf{B}_2(\mathbf{x})g \tag{8}$$

とマトリクス形式で表示し，F_u を要素内の各接点における等価接点力とすると，釣り合い条件より

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{ug} \\ K_{gu} & K_{gg} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \\ g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathrm{F}_u \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9}$$

が成立する．ここに，

$$K_{uu} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_1 dV,\ \ K_{ug} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_2 dV$$

$$K_{gu} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_1 dV,\ \ K_{gg} = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_2 dV$$

である．Ω^e は各要素の体積である．これより，K_{gg} の逆行列が存在する場合に

$$g = -K_{gg}^{-1}K_{gu}\delta \tag{10}$$

と求められる．(10) を (9) に代入することにより，要素内のひずみは

$$\varepsilon = (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2K_{gg}^{-1}K_{gu})\cdot\delta = \mathbf{B}\cdot\delta \tag{11}$$

と表すことができ，(6) の内挿関数を用いた場合の要素剛性マトリクスは

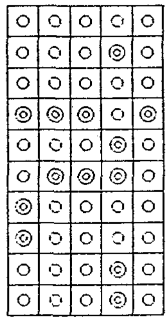

図1.　分岐要素の分布
◎：分岐要素，○：降伏要素

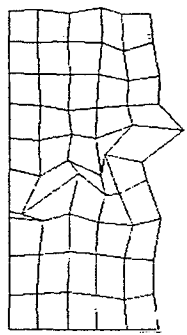

図2.　全体の変形

$$\int_{\Omega^e} \mathbf{B}\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} dV\cdot\delta = \int_{\Omega^e}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2K_{gg}^{-1}K_{gu})^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2K_{gg}^{-1}K_{gu})dV\cdot\delta = \mathrm{F}_u \tag{12}$$

と表される．

以上より，各増分段階において，各要素内の積分点で (5) に基づいて分岐の判定を行い，分岐条件を満足する場合には (11) の要素剛性マトリクスを用い，そうでない場合は通常の剛性マトリクスを用いて全体剛性マトリクスを作成することにより，ひずみの局所化の解析を行うことができる．

本手法による数値解析の結果を図1.および図2.に示す．ここでは分岐が起こりやすいように，解析領域の左下隅部の要素に非圧縮要素を初期不正条件として与えている．

5. おわりに

不連続適合条件式ならびに特殊な内挿関数を用いることによる，ひずみの局所化およびその分岐問題についての有限要素法による一解析手法を示した．

参考文献

(1)　J.R.Rice (1976), The localization of plastic deformation, in: *Theoretical and Applied Mechanics*, Eds. W.T.Koiter, North-Holland, Amsterdam, pp.207-220

(2)　R.L.Taylor, P.J.Beresford and E.L.Wilson (1976), A non-comforming element for stress analysis, *International Jounal of Numerical Method in Engineering*, **10**, pp.1211-1219