

CS 1-16〔Ⅲ〕 平面ひずみ試験における供試体のせん断層付近のひずみ分布について

東京大学大学院 (学) 吉田 輝
 東京大学生産技術研究所 (正) 龍岡文夫

はじめに： 筆者らは、砂の平面ひずみ試験における供試体の変形挙動を知るために、従来から写真1に示すような供試体の σ_2 面のメンブレン上に印刷した10mm間隔の格子模様を拘束板に垂直な方向から写真撮影してきた。これを図1に示すようなステッピングモータ付きXY台上に固定し、写真の一部をCCDビデオカメラで画面に格子点が1つだけ入るように拡大し、パーソナルコンピュータで画像処理を行って格子点の位置を読み取る。これを全ての格子点に対して行う。こうして得られた格子点座標データファイルをもとに、格子点を節点とする四辺形・4節点のバイリニア(bilinear)要素を用いてひずみ分布を計算し、各種ひずみの等高線図などを描いている。メンブレンに印刷されたマーカーの動きが供試体内部での砂粒の動きをどれほど正確に表しているかは別問題として、従来のひずみ計算プログラムでは形状関数・内挿関数とも1次関数であるためせん断層付近における精度はせん断層の幅に対する要素寸法に大きく左右されるので、十分な精度を得るには要素分割をある程度細かくする必要がある(有限要素法でのH法の考え方)。ところが、格子点を細かくすれば写真読み取りの作業量が激増してしまう。

P法要素の形状関数： 以上のような理由から、格子間隔を狭くすることなく精度を向上させるため、P法有限要素法で用いられている要素を使用することを試みた。P法とは内挿関数・形状関数(アイソパラメトリック要素では内挿関数と同じ)の次数を上げることによって精度を上げる手法であり、中間節点を用いることなく要素の境界を曲線とすることができる。ここでは、既存のひずみ計算プログラムを利用することにしたため、内挿関数によって要素内の変位を求めることはせず、形状関数だけを用いた。まず、図2に示すような正方形の基準要素を考える。①～④は節点番号である。基準要素内での位置は座標系(s, t)で表される。他方、実要素の座標は(x, y)座標系で表される。要素上の任意の地点でのxの値をs, tを用いて次のように近似する。(以下、yについても同様)

$$\begin{aligned} x = & x_1(1-s)(1-t)/4 + x_2(1+s)(1-t)/4 + x_3(1+s)(1+t)/4 + x_4(1-s)(1+t)/4 \\ & + \alpha_{x5}(1-s^2)(1-t)/2 + \alpha_{x9}(s-s^3)(1-t)/2 + \alpha_{x6}(1+s)(1-t^2)/2 + \alpha_{x10}(1+s)(t-t^3)/2 \\ & + \alpha_{x7}(1-s^2)(1+t)/2 + \alpha_{x11}(s-s^3)(1+t)/2 + \alpha_{x8}(1-s)(1-t^2)/2 + \alpha_{x12}(1-s)(t-t^3)/2 \end{aligned} \quad (式1)$$

ここではs, tの3次式としているが、さらに高次の項を加えることもできる。 x_i ($i=1, 2, 3, 4$)は各節点におけるxの値、 α_{xi} ($i=5 \sim 12$)は未定係数であり、実要素の境界の形状に合わせて最小2乗法で決める。たとえば式1は境界①-②上において、

$$x = x_1(1-s)/2 + x_2(1+s)/2 + \alpha_{x5}(1-s^2) + \alpha_{x9}(s-s^3) \quad (式2)$$

となる。境界①-②上(両端を除く)の数地点における「式2から計算されるxの値(近似値)と写真から読み取ったxの測定値 x_t の差の平方」の和が最小になるように未定係数 α_{xi} ($i=5 \sim 12$)を決めればよい。このとき、それぞれの x_t に対応するsの値を求めておく(言い換えれば、変形前の境界上のある任意の点が、変形後の境界上のどの点に移ったかを決定する)必要があるが、その方法は実際の供試体の変形をなるべく忠実に表現するものでなければならない。せん断層付近のマーカーの線の変形の様子を写真で観察したところ、図3に示すように、マーカーの線上で曲率最大の点はせん断中はほぼ固定しているらしいことがわかった。この事実には忠実でかつ単純な方法として以下の方法をここでは採用する。

変形前・後での境界線上の点の対応づけ： 変形前・後の実要素の境界①-②の形状が図4のようであるとす。変形後の線を平行移動し、節点①を重ね合わせ(点P)、残りの節点どうしを直線でつなぐ(AB)。写真から読み取った変形前の境界上の測定点Xから線分ABに平行な直線をひき、P Aとの交点をX'とす。点Xに対応するsの値を次式によって決定する。

$$s = -1 + 2(PX' / PA)$$

（式3）

変形後についても全く同様に、境界上のそれぞれの測定点からA Bに平行な直線をP Aに向かって引き、sを求める。他の境界でも同様である。

仮想格子点座標を用いたひずみ計算： 以上のような方法によって式1のすべての未定係数を決定すれば（yについても同様）、要素内の任意の位置(s, t)に対応する(x, y)が計算できる。基準要素を N^2 個の正方形に等分しこれを仮想的な格子とみなせば、もとの基準要素の4隅の4点に加えて、要素内部に $(N-1)^2$ 個、境界上に $4(N-1)$ 個、合計 $(N+1)^2-4$ 個の仮想的な格子点ができる。これらすべての格子点において式1によってxを求めれば（yも同様）、通常の格子点座標データファイルと同等に扱える仮想格子点座標データファイルが作成でき、筆者らが従来使用してきた四辺形・4節点のバイリニア要素によるひずみ計算プログラムがそのまま使用できる。一例として、元の要素を9($=3^2$)等分して描いた最大せん断ひずみ $\varepsilon_1-\varepsilon_3$ の等高線図を図5（a）に示す。図5（b）はP法を適用しない場合の等高線図である。ともに写真1のような2枚の写真から描いたものである。図5（b）ではせん断層内で格子の1列ごとに不合理な山が顕著に現れている。これは、要素形状、せん断層に対する要素配列の方向、要素の次数、せん断層の幅に対する要素の大きさ、などによって生じると考えられる。図5（a）ではかなり改善されている。なお、境界線上の点は、それぞれの境界で9点ずつ読み取った。

あとがき： 仮想格子点によって要素分割を細かくするという方法は、メンブレンに印刷する格子の間隔を小さくすると同様の効果を狙ったものであり、H法の発想によっている。したがって、ここで述べた方法はP法とH法を併用したものと言えよう。P法によって変位の内挿関数を求めてひずみを直接計算することも考えられるが、形状関数にのみP法を適用する方法もそれなりに有効であることを示した。

謝辞： 写真1の写真を撮影させて下さった東大生研の朴春植氏、P法の示唆を与えて下さった東大生研5部半谷裕彦教授、図5の作成に使用した図化プログラムの改良などあらゆる面で助けて下さった元法政大学工学部（現東京都江戸川区勤務）の新城浩一氏にお礼を申し上げます。

参考文献： ダット, G.・トゥゾー, G.／福田収一監訳(1990):最新 有限要素法全解、パーソナルメディア 中村伸也(1987):砂の平面ひずみ圧縮試験における供試体内のひずみ分布、東京大学修士論文 ラズナ株式会社(1991):P法概説書 杉江日出澄・岡崎明彦・足達義則・尾崎正弘(1986):FORTRAN77による数値計算法、培風館 吉田輝(1992):砂の平面ひずみ圧縮試験におけるせん断層の観察、東京大学修士論文

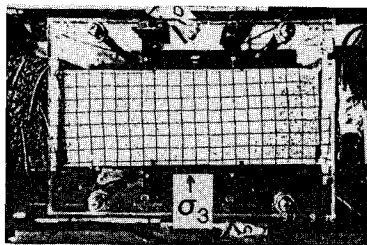


写真1 メンブレンに印刷された10mm間隔の格子（供試体寸法 高さ20cm、長さ16cm、幅8cm）

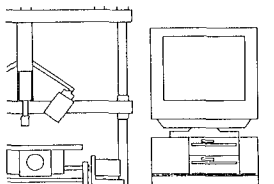


図1 座標読み取り装置

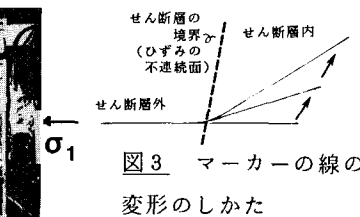


図3 マーカーの線の変形のしかた

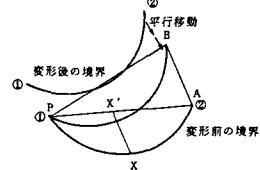


図4 (x, y) ~ (s, t)の対応づけ

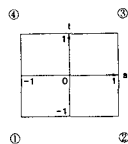


図2 基準要素

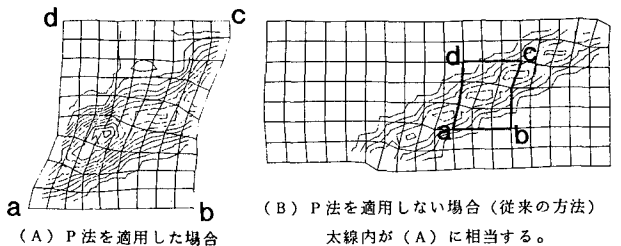


図5 等高線図の比較

（最大せん断ひずみ $\varepsilon_1-\varepsilon_3$ 、10%おき）

Ticino砂、 $\varepsilon_a=0\sim5.0\%$