

CS1-10〔Ⅲ〕 分岐理論による砂の試験体の寸法効果の一解釈

長岡技術科学大学

正会員 ○池田 清宏

大成建設(株)技術研究所

正会員 後藤 聡

1 はじめに

砂のような粒状体の3軸圧縮試験において、試験体の寸法効果が存在することが明らかにされつつある¹⁾。例えば、図1に示す応力比-歪($\sigma'_1/\sigma'_3 - \epsilon_a$)曲線を見ると、試験体の高さの増加に伴い、曲線形が漸次変化し、ピークが鋭くなっている²⁾。近年注目されているように、砂の滑り破壊現象が分岐現象の一種であることに本研究は着目し、このような寸法効果の仕組みを分岐理論により記述するものである。

2 シェルアナロジー

分岐現象の代表例として、シェル構造物の荷重-変位曲線を図2に示す。初期不整 $\epsilon = 0$ という完全系の(理想的な)解曲線では主径路上の分岐点から、分岐径路が枝分れしている。一方、初期不整 $\epsilon \neq 0$ を有する不完全系では、初期不整が小さくなるに従い、曲線形が漸次変化し、ピークが鋭くなりながら、完全系に漸近している。

このように、砂の滑り現象はシェルの座屈現象と非常に良く似ている。しかし、砂の試験体はある初期不整 ϵ を不可避免的に有するために、実験では分岐点は発生せず、図1のように滑らかな応力比-歪曲線しか得られない。

シェルの座屈現象とのアナロジーから、砂の応力比-歪曲線の変化は、試験体の高さ H の変化に伴う、初期不整の大きさの変化により生じていると推測できる。試験体にある一定の寸法の初期不整(砂の粒径、砂のかみ合いの性状、境界の不整等)が存在するとすると、初期不整の影響は試験体高さ H と反比例して相対的に減少することになる。この状況をふまえ、仮定

$$\epsilon = \frac{1}{H} \quad (1)$$

を提案し、その妥当性を分岐理論と実験結果に

基づき検証することとする。

3 分岐理論

分岐現象は砂の滑り破壊のみならず、種々の構造物の破壊現象、熱対流問題等の数多くの分野で研究されており、分岐の数学的、数値解析的な枠組みも殆ど完成されている³⁾。例えば、初期不整が荷重-変位曲線の極大点の位置に及ぼす影響に関するKoiterの2/3乗則⁴⁾等の重要な成果が数多く得られている。

本研究⁵⁾では、分岐現象を応用数学の分野で開発された現代分岐理論により記述した、非線形の釣合方程式からLyapunov-Schmidt展開と呼ばれる手法により、1次元の釣合式(分岐方程式)を誘導した。この方程式は分岐点の近傍で起こる分岐現象を、初期不整が微小な場合(漸近的)には、完全に記述するものである。この方程式から前述の2/3乗則を誘導し、また荷重-変位曲線の漸近近似式も求めた。

これらの結果から、有限の高さの試験体の応力比-歪曲線上の極大点($(\sigma'_1/\sigma'_3)_c, (\epsilon_a)_c$)と無限の高さの試験体の理想分岐点($(\sigma'_1/\sigma'_3)_c^0, (\epsilon_a)_c^0$)との関係を表す下記の漸近式が求まる、

$$(\sigma'_1/\sigma'_3)_c = (\sigma'_1/\sigma'_3)_c^0 - \alpha \left(\frac{1}{H} \right)^{2/3} + \text{高次項} \quad (2)$$

$$(\epsilon_a)_c = (\epsilon_a)_c^0 + \beta \left(\frac{1}{H} \right)^{1/3} + \text{高次項} \quad (3)$$

ここで、 α と β は試験体の特性等に依存するある定数である。

また、応力比-歪曲線の漸近近似式⁵⁾も

$$\begin{aligned} & \epsilon + \frac{3}{2\alpha\beta} [\delta\epsilon_a - \gamma\delta(\sigma'_1/\sigma'_3) + \eta(\delta\epsilon_a)^2] \delta(\sigma'_1/\sigma'_3) \\ & + \frac{1}{2\beta^3} [\delta\epsilon_a - \gamma\delta(\sigma'_1/\sigma'_3) + \eta(\delta\epsilon_a)^2]^3 + \text{高次項} = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

と求まる。ここで、

$$\delta \varepsilon_a = \varepsilon_a - (\varepsilon_a)_c^0, \quad \delta(\sigma'_1/\sigma'_3) = \sigma'_1/\sigma'_3 - (\sigma'_1/\sigma'_3)_c^0$$

であり、 γ と η は試験体の特性等に依存するある定数である。

4 実験結果への適用

図1の砂の実験結果(応力比-歪曲線)から、応力比 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_c$ の極大点の座標 $((\sigma'_1/\sigma'_3)_c, (\varepsilon_a)_c)$ の値を読み取り、初期不整合 $\epsilon (= 1/H)$ との相関を調べた。例えば、図3に示す応力比 $(\sigma'_1/\sigma'_3)_c$ と $(1/H)^{2/3}$ の相関図は非常に良く直線に乗っており、 $2/3$ 乗則の式(2)の妥当性を示している。このことは、仮定(1)式、並びに砂の滑り破壊を分岐現象として捉える本研究の立場の正当性をも裏付けるものである。図3の $1/H = 0$ に対する外挿値が高さ無限大($H = \infty$)の理想的な試験体の強度を与えることになる。

さらに、歪 $(\varepsilon_a)_c$ は H が大きい時には $1/H$ の $1/3$ 乗則に合致すること、 $H = \infty$ に対する理想分岐点 $((\sigma'_1/\sigma'_3)_c^0, (\varepsilon_a)_c^0)$ の位置、理想的な応力比-歪曲線等を文献5)では求めている。

5 まとめ

本研究では分岐理論により、砂の試験体の寸法効果を記述し、実験結果との比較により、その妥当性を示した。砂の滑り現象を分岐理論により如何に記述して行かかが著者らの今後の課題である。

参考文献

- [1] Goto, S. and Tatsuoka, F. (1988): "Effects of End Conditions on Triaxial Compressive Strength for Cohesionless Soil," Advanced tri-axial testing of soil and rock, ASTM STP 977.
- [2] Goto, S. (1986): "Strength and deformation characteristics of granular materials in triaxial tests," Doctor thesis, University of Tokyo.
- [3] 藤井 宏 (1979): 自然界の縞模様, 数学セミナー増刊(山口昌哉編), 入門現代の数学 [I] 非線形の現象と解析
- [4] Koiter, W.T. (1945): "On the Stability of Elastic Equilibrium," Dissertation. Delft, Holland, (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).

[5] K. Ikeda and S. Goto (1992): Imperfection Sensitivity for Size Effect of Granular Materials, Preprint.

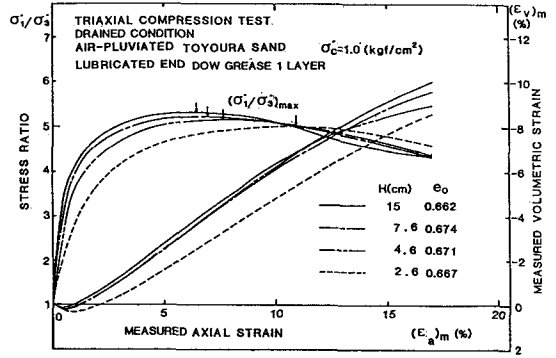


図1 砂の応力比-歪 $(\sigma'_1/\sigma'_3 - \varepsilon_a)$ 曲線²⁾

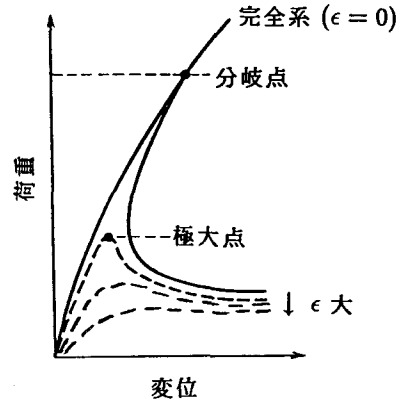


図2 シェルの荷重-変位曲線(一般図)

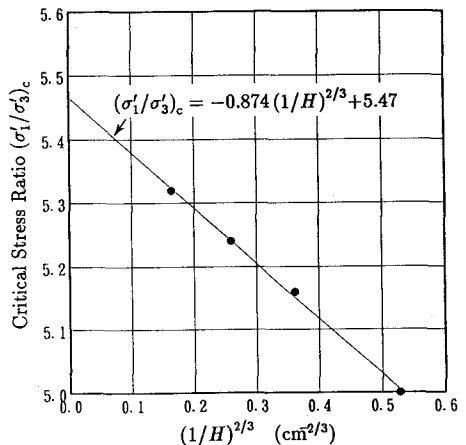


図3 $(1/H)^{2/3}$ と $(\sigma'_1/\sigma'_3)_c$ の相関図