II－609　固定座標における開水路往復流の分散係数の解析

長崎大学工学部　正○古本勝弘
九州共立大学工　正　栗谷陽一

１．まえがき

河川感潮域などにおいて拡散物質の一次元的濃度解析を行う場合、分散係数を知ることが必要である。著者らは、アスペクト比が大きな開水路において、往復流と定常流とが重畳した流れの分散係数を求めた。[1)] これは、Taylorの分散理論にならって、断面平均流速とともに移動する座標の上で、一定の濃度勾配をもち、移流流束と横方向拡散流束とが往復流一周期の中で釣り合う条件で求められた。一方、河川感潮域の塩分のように、固定点に一定濃度が保持され、一周期平均して濃度の定常が保たれる場合、断面平均濃度Cの保存式とその解は(1),(2)で与えられる。

$$U_F\frac{\partial C}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(D_L\frac{\partial C}{\partial x}\right) \qquad (1) \qquad\qquad C=C_0 exp\left(\frac{U_F}{D_L}x\right) \qquad (2)$$

ここに、U_F ：断面平均固有流速、 D_L ：一周期平均分散係数。従って、x 方向の濃度勾配は一定ではなく、移流速度と横方向拡散により形成される断面内濃度分布はx 方向の位置に関係することになり、分散係数についても一定の濃度勾配を仮定した前の解析[1)]とは異なることが考えられる。ここでは、固定座標の上で、濃度がx 方向に指数関数で与えられる場合の分散係数を求め、比較を行う。

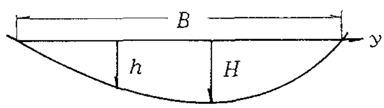
２．理論解析

水深h が幅方向に緩やかに変化する開水路において、固有流を伴う往復流の分散現象を考える。流れは等流、等密度とする。流下方向、幅方向にx,y 軸をとる。水路幅をB （中心線に対して対称形の場合は半幅をB ）、代表水深をH とし、以下で無次元変数$\eta=y/B$, $\zeta=h/H$ を用いる。アスペクト比が大きい場合、分散には流速・濃度の横断方向の偏差が主要な影響を与えるため、これらの水深方向の平均量で考える。位置y における鉛直線平均流速u は定常流のものに等しいと仮定し、Manning式を用いると、

$$u=h^{2/3}I^{1/2}/n=K_q U\zeta^{2/3} \qquad (3)$$

ここに、断面平均流速 $U=(I^{\frac{1}{2}}/n)\int_0^B h^{\frac{5}{3}}dy/\int_0^B h\ dy$,

$$K_q=\int_0^1\zeta\, d\eta/\int_0^1\zeta^{5/3}d\eta$$



図－1

鉛直線平均の物質濃度ｃの保存式は、横方向拡散係数をε とおき、x 方向拡散を省略し

$$\frac{\partial c}{\partial t}+u\frac{\partial c}{\partial x}=\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(h\varepsilon\frac{\partial c}{\partial y}\right) \qquad (4)$$

ここで、 $\varepsilon=\alpha u_* h=K_* H|U|\zeta^{3/2}$ ， $K_*=\alpha K_q n g^{1/2}H^{-1/6}$ とおき，独立変数(x, t)の代わりに

$$\xi=(K_*H/B^2)\,x \ , \qquad \theta=(K_*H/B^2)\int_0^t|U|\,dt \qquad (5)$$

を導入するとともに、濃度の指数変化 $c=\hat{c}\ exp(\lambda\xi)$ 　(6)　を仮定して、(4)を書き直すと、

$$\frac{\partial\hat{c}}{\partial\theta}+\lambda\frac{U}{|U|}K_q\zeta^{2/3}\hat{c}=\frac{1}{\zeta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\zeta^{5/2}\frac{\partial\hat{c}}{\partial\eta}\right) \qquad (7)$$

この式で $U\geqq 0$ 、$U\leqq 0$ に対する解をそれぞれ、 $\hat{c}=A\,Y(\eta)exp(-\sigma\theta)$ ， $\hat{c}=B\,\overline{Y}(\eta)exp(-\overline{\sigma}\theta)$ 　(8)
とおくと、$Y(\eta)$, $\overline{Y}(\eta)$ が満足すべき式はそれぞれ、

$$\frac{d}{d\eta}\left(\zeta^{\frac{5}{2}}\frac{dY}{d\eta}\right)+\left(\sigma\zeta-\lambda K_q\zeta^{\frac{5}{3}}\right)Y=0 \ , \qquad \frac{d}{d\eta}\left(\zeta^{\frac{5}{2}}\frac{d\overline{Y}}{d\eta}\right)+\left(\overline{\sigma}\zeta+\lambda K_q\zeta^{\frac{5}{3}}\right)\overline{Y}=0 \qquad (9)$$

上式は、σ, $\overline{\sigma}$ が離散的な特定の値σ_i, $\overline{\sigma}_i$ (i=1,2,...∞)をとるとき、境界条件〔$\eta=0,1$ で $\zeta^{5/2}(dY/d\eta)=0$〕を満足する解 Y_i ,$\overline{Y}_i$ が存在する。従って 、$\hat{c}$ は

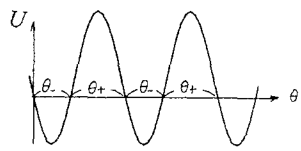
$$U\geqq 0 \text{ のとき } \hat{c}=\sum_{i=1}^{\infty}A_iY_i exp(-\sigma_i\theta) \ , \qquad U\leqq 0 \text{ のとき } \hat{c}=\sum_{i=1}^{\infty}B_i\overline{Y}_i exp(-\overline{\sigma}_i\theta) \qquad (10)$$

と表される。係数A_i , B_i を決めるためには、$U=0$ での濃度の連続条件を使う。θは、$U=0$ の時点からの経過時間に対して$U\geqq 0$,$U\leqq 0$ の領域別に定義しているので、それぞれの領域に対するθの増分をθ_+, θ_- とおくとき（図－2)、

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i Y_i \exp(-\sigma_i \theta_+) = \sum_{i=1}^{\infty} B_i \overline{Y}_i , \quad \sum_{i=1}^{\infty} B_i \overline{Y}_i \exp(-\overline{\sigma}_i \theta_-) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i Y_i \quad (11)$$

ところで、関数$Y_i, \overline{Y}_i$ (i=1,2,3･･･)にはそれぞれ次の直交条件がある。

$$\int_0^1 Y_i Y_j \zeta \, d\eta = 0 , \quad \int_0^1 \overline{Y}_i \overline{Y}_j \zeta \, d\eta = 0 \qquad [i \neq j] \qquad (12)$$



図－2

従って、(11)の第１式に $Y_i \zeta$ を，第２式に $\overline{Y}_i \zeta$ をそれぞれ掛けて積分すると

$$A_i \exp(-\sigma_i \theta_+) \int_0^1 \zeta Y_i^2 \, d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} B_j \int_0^1 \zeta Y_i \overline{Y}_j \, d\eta , \quad B_i \exp(-\overline{\sigma}_i \theta_-) \int_0^1 \zeta \overline{Y}_i^2 \, d\eta = \sum_{j=1}^{\infty} A_j \int_0^1 \zeta \overline{Y}_i Y_j \, d\eta \qquad (13)$$

(10)でiを各々有限項とるとすれば、上式はA_i, B_i に関する2i個の連立同次方程式となっているので、A_i, B_i が非自明解を持つためには、それらの係数で作る行列式Dが０でなければならない。従って、λとこれに対応する固有値$\sigma_i, \overline{\sigma}_i$ 、固有関数$Y_i, \overline{Y}_i$ を求め、$D=0$ を満足させる流れの条件θ_+, θ_- を求めると、濃度分布(10)が決定できる。

往復流一周期T における物質流束がない場合は,(2),(6)における指数部を等置して分数係数を得ることができる。

$\overline{|U|} = \int_0^T |U| \, dt / T$ とおくと、固有流速は $U_F = \int_0^T U \, dt / T = \dfrac{\theta_+ - \theta_-}{\theta_+ + \theta_-} \overline{|U|}$ と表され、D_L は

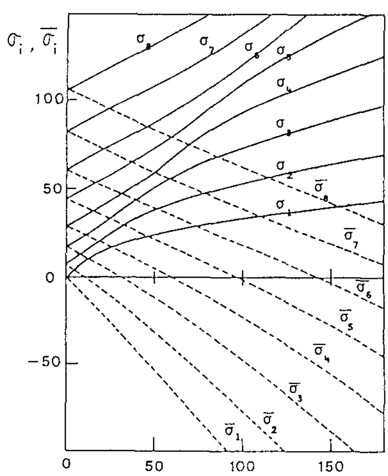
$$D_L \Big/ \left(\frac{B^2}{K_e H} \overline{|U|} \right) = \frac{1}{\lambda} \frac{\theta_+ - \theta_-}{\theta_+ + \theta_-} \qquad (14)$$

３．数値計算とその結果

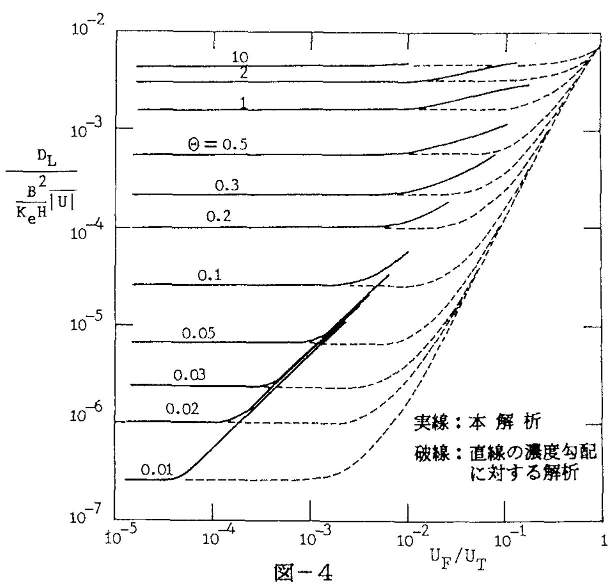
放物形断面 $\zeta = 2\eta - \eta^2$ の水路に対して計算を行った。 $U = U_F + U_T \cos(2\pi t / T)$ とすると、

$$\theta_+ = \Theta \left(\Psi + \frac{U_F}{2U_T} \right), \quad \theta_- = \Theta \left(\Psi - \frac{U_F}{2U_T} \right), \quad \Theta = T \Big/ \left(\frac{B^2}{K_e H U_T} \right), \quad \Psi = \frac{1}{\pi} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{U_F}{U_T} \right)^2} + \frac{U_F}{U_T} \sin^{-1} \left(\frac{U_F}{U_T} \right) \right)$$

と表され、分散係数D_L はΘ とU_F/U_T の２つのパラメータに支配されることがわかる。Θ の物理的意味は往復流の周期と物質が水路幅一杯に拡散するに要する代表時間との比である。図-3に固有値$\sigma_i, \overline{\sigma}_i$ とλ の関係を、図-4に分散係数とU_F/U_T の関係をΘ をパラメータに示している。直線の濃度勾配に対する前の解析は、固有値σ_i については図-3のλ=0における値に一致し、D_L については図-4に破線で示している。各Θ に対して$U_F/U_T \ll 1$ の領域では両解析は一致するが、U_F/U_T が大きくなると差異が生じる。$\Theta \ll 1$ のときD_L が(U_F/U_T) の１乗に比例することと、各Θ に対して(U_F/U_T) がある値を超えると解が無くなることが、直線の濃度勾配の解析と明らかに異なるところである。U_F/U_T が大きくなって解が無くなることは、固有流速U_F による移流流束が大きくなり、横方向拡散流束と平衡することなく、濃度の周期性が成立しなくなることを意味している。



図－３



図－４

引用文献　1）粟谷，古本：海岸工学論文集,36巻,
pp.799-803,1989.