

II-498

固有値を用いたソリトン分裂条件の推算

電力中央研究所 正員 松山昌史

東北大学工学部 正員 今村文彦

1. はじめに

1983年の日本海中部地震では、秋田県沖で押し寄せる津波が分裂する特異な現象が観測されている。ソリトン分裂に関しては、その発生機構および伝播について、いろいろな研究が行われている(岩崎, 1979)。しかし、実際に津波が発生したときに津波がソリトン分裂するか否かの条件について実用的な方法はまだなく、構造物に及ぼす影響もよく知られていない。本研究は、Boussinesq方程式を基に、一様水深を伝播する孤立波を対象として分裂する条件及びその個数や波高を理論的に推算し、数値計算と比較したものである。

2. アーセル数とソリトン分裂

以下に示す Boussinesq 方程式上におけるソリトンの変形について考える。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \{u(h+\eta)\}}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{1}{3} h^2 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad (2)$$

x は図1に示すように孤立波の進行する水平方向の距離、 η は静水位面からの水位上昇、 u は x 方向の断面平均流速を表す。また、 H , h はそれぞれ孤立波の波高、水深を表している。このとき $x \rightarrow \pm\infty$ で $\eta \rightarrow 0$ という境界条件を与えるとき $\eta = H \operatorname{sech}^2 \{ \sqrt{3H/(4h^3)} (x - \sqrt{g(h+H)}t) \}$ という孤立波解が得られる(岩崎, 1979)。

ところで式(1), (2)に、ある波高と波長をもった sech^2 型の初期波形を与えた場合、孤立波が分裂するかどうか、また分裂した場合にその個数とそれぞれの波高がどうなるかは固有値問題に帰着する。すなわち、固有値の個数が分裂波の個数に、また固有値そのものがそれぞれの波高に対応する。まず、水位が波高の1/100になる両端の距離を波長と定義した場合、波高、波長がそれぞれ H_0 , L_0 の波形は次式のように表される。

$$\eta = H_0 \operatorname{sech}^2(6x/L) \quad (3)$$

上式(3)を初期波形として一様水深 h 上に伝播させると、固有値 λ_n は

$$\lambda_n = -\frac{9}{L^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{6} \frac{L^2 H_0}{h^3}} - (2n-1) \right\}^2 = -\frac{9}{L^2} \left\{ \sqrt{1 + \frac{Ur}{6}} - (2n-1) \right\}^2 \quad (4)$$

となる(渡辺, 1985)。ここで、 n は正の整数、 Ur はアーセル数 ($= L^2 H_0 / h^3$) であり、大きい括弧 $\{ \}$ の中が正でなければならない条件から n の最大値を決定することができる(渡辺, 1985)。

$$0 < n < \frac{1 + \sqrt{1 + Ur/6}}{2} \quad (5)$$

この n の最大値、すなわち固有値の個数が発生するソリトンの個数になる。このアーセル数と固有値の個数の関係を図2に示す。各固有値 ($\lambda_n, n=1, 2, \dots$) に対応した波高を H_n とすると、波高も固有値に対応して1つ決まる。各ソリトンの波高と入射波の波高の比は

$$\frac{H_n}{H_0} = -\frac{4h^3}{3H_0} \lambda_n = \frac{12}{Ur} \left\{ \sqrt{1 + \frac{1}{6} Ur} - (2n-1) \right\}^2 = 12 \left\{ \sqrt{\frac{1}{Ur} + \frac{1}{6}} - (2n-1) \sqrt{\frac{1}{Ur}} \right\}^2 \quad (6)$$

となる。このように一様水深上で発生したソリトン分裂の個数とそれぞれ波高はアーセル数によって決めることができる。また、 $n=1$ のソリトンの波高がもっとも大きく、 $n=2, 3, \dots$ となる毎に波高は小さくなっている。

次に、分裂する過程でのえり分け距離(sorting distance)(岩崎ら, 1978)を見積もる。ソリトンの伝播速度は $c = \sqrt{g(h+H)} \simeq \sqrt{gh} \{1 + H/(2h)\}$ であり、波高の大きいソリトンはほど速く伝播する。 $n=i$ と $n=j$ ($i < j$) のソリトンの相対速度 $s_{ij} = \sqrt{gh} (H_i - H_j)/(2h) = \sqrt{gh} 24\beta \left(\sqrt{1 + Ur/6} - i - j + 1 \right) (j-i)$ であり ($\beta = (h/L_0)^2$)、この2つのソリトンが l 離れるのに要する時間を ds_{ij} とすると、

$$ds_{ij} = \frac{h}{H_i - H_j} 2l = \frac{1}{24\beta(\sqrt{1 + Ur/6} - i - j + 1)(j-i)} l \quad (7)$$

となる。

3. 数値計算との比較

Boussinesq 式を数値計算し、理論と比較した。数値計算は2ケース行い、波形勾配が0.00527の初期波形を2種類の水深（相対水深が0.032と0.024）に伝播させた。それぞれのアーセル数は162と384であり、伝播距離は約8波長である。まず、分裂した各ソリトンの波高について式(6)と数値計算を比較したものが、図3であり、2個及び3個に分裂する場合について理論と計算の値はほぼ一致している。伝播速度については、相対水深が0.024の場合の数値計算から得られた伝播速度（ソリトンの頂点の速度）と理論解から得られる伝播速度を図4に比較した。どの孤立波も分裂が進むにつれて、理論値に近づいていくが、分裂過程の初期では不一致がみられる。これは、理論では考慮されていない分裂時における非線形干渉にかからる phase shift が主な原因と考えられる。次に、ソリトンの分裂に必要なえり分け距離について式(7)と数値計算の比較を図5に示した。なお、この図での l は入射波の半波長としている。この結果をみると、数値計算の方がどちらも早めに分裂しているが、分裂過程での伝播速度の理論値との違いのためと考えられる。しかし、それを考慮に入れたとえり分け距離についても、この推算がほぼ妥当なことを示している。

4. まとめ

一様水深上に、孤立波を入射した場合の分裂条件、個数およびそれぞれの波高についてアーセル数をパラメータとして決めることができることを示し、数値計算によってその妥当性を確かめた。分裂に必要なえり分け距離についても少し過大評価になるものの、十分な程度で推算できることを示した。また、その原因は非線形干渉による phase shift の効果であると考えられる。今後、地形変化および任意の入射波形を取り入れた場合の検討が必要である。

参考文献

- 岩崎敏夫(1979)：ソリトン分裂，水工学に関する夏期研修講義集 B コース，B-5。
 渡辺慎介(1985)：ソリトン物理入門，培風館，p249。
 岩崎敏夫ら(1978)：孤立性段波のえり分け距離に関する研究，第25回海岸工学講演会論文集，pp132-136。

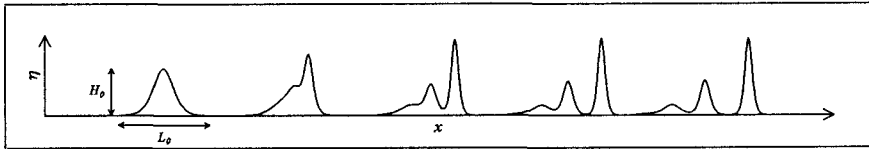


図1 座表系とソリトン分裂の様子

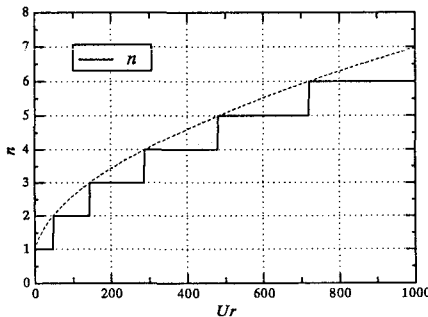


図2 アーセル数とソリトンの個数

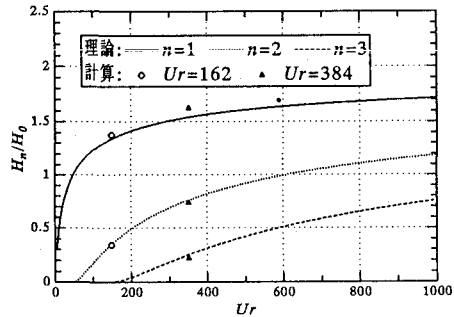


図3 アーセル数と波高増率

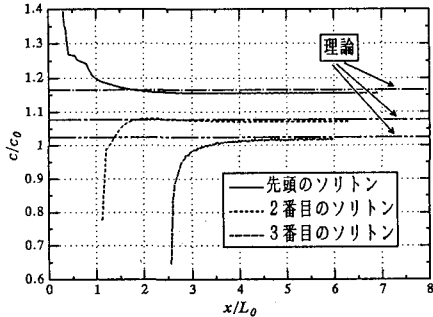


図4 相対水深0.024でのソリトンの伝播速度

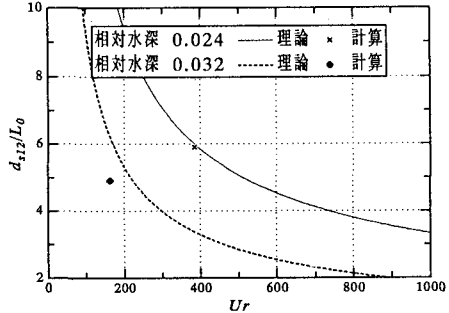


図5 アーセル数とえり分け距離