II-487　Ｇａｌｅｒｋｉｎ法に基づく強分散性波動方程式の基本特性に関する検討

東京工業大学　正　員　灘岡　和夫
東京工業大学　学生員　中川　康之

１．はじめに

沿岸域における波動場は、海洋構造物の設計や海浜変形予測などでの基本的外力となることから、その一般的な解析手法の確立が強く望まれている。特に、最近では海洋構造物の大水深化などにより多方向性を含めた不規則性の評価が従来にまして重要となりつつあるが、そのためには波の分散性を広いスペクトル帯域上で正しく表現できる波動方程式が必要となってくる。

既存の代表的な分散性波動方程式としてはBoussinesqタイプの方程式がある。しかし、それらは長波領域近傍の狭いスペクトル帯域の波動場に適用性が限定されるという本質的な難点を有している弱分散性の波動方程式となっているため、任意の不規則波動場に適用することはできない。これに対して最近著者らは、重み付き残差法の一種であるGalerkin法を用いることによって、任意の広いスペクトル帯域を有する波動場に対しても適用できる強分散性波動方程式を導出することに成功している[1)]。本稿ではその計算例と基本的な特性について述べることにする。

２．Ｇａｌｅｒｋｉｎ法に基づく波動方程式

先に著者らが導いた波動方程式[1)]は、従来の波動方程式の導出過程とは全く異なる新しい手法として、Galerkin法を用いることにより定式化されている。そこではまず波動運動に伴う水粒子の水平方向流速ベクトル$\mathbf{u}$＝（u，v）を以下のように仮定している。

$$\mathbf{u}(x,y,z,t)=\sum_{i=1}^{I}\mathbf{W}_i(x,y,t)\cdot F_i(k_i;h;z)\quad,\qquad F_i(k_i;h;z)=\frac{\cosh k_i(h+z)}{\cosh k_i h}\tag{1}$$

ここに、x，y：水平座標、z：鉛直座標、h：水深、である。上式中のパラメータk_i(i=1,･･･,I)は波数に対応する量であり、その値は計算対象とする波動場の波数領域を覆うようにして設定されるが、Galerkin法の定式化の観点から言えば、k_iは試験関数F_iのｚ依存性を表現する形状パラメータであり、未知変数ベクトル$\mathbf{W}_i$はF_iの重み関数である。

上式を３次元空間（x，y，z）上で定義される連続式と運動方程式に代入し、水表面および底面における境界条件式を用いてGalerkin法の手続きに基づいて２次元空間（x，y）上の方程式系に変換することにより、水位$\zeta(x,y,t)$および$\mathbf{W}_i(x,y,t)$(i=1,･･･,I)の時間発展を記述する波動方程式が以下のように得られる。ここで、**b**と**A**、**C**はそれぞれk_iとｈによって表される係数ベクトルおよびマトリクスである。

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\sum_{i=1}^{I}\left\{\nabla\cdot\mathbf{W}_i\frac{\tanh k_i h}{k_i}\right\}=0\tag{2}$$

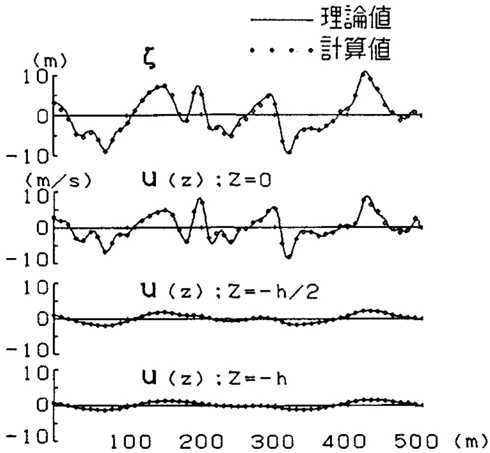
$$\mathbf{A}(k_i,h)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial t}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\mathbf{W}_I}{\partial t}\end{bmatrix}=\nabla\left\{\zeta\,\mathbf{b}(k_i,h)+\nabla\cdot\mathbf{C}(k_i,h)\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\mathbf{W}_1}{\partial t}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial\mathbf{W}_I}{\partial t}\end{bmatrix}\right\}\tag{3}$$

３．本波動方程式の基本特性

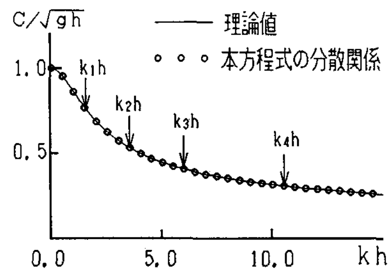
図－１は長波領域から深海波領域までの広いスペクトル帯域を有する不規則波動場に対して、W_iの成分数

Ｉを４として計算を行ったときの表面波形とｚ＝０，－ｈ／２，－ｈでの水平流速波形を示したものである。この場合、２次元水平床上の線形波動場を取り扱っていることから理論解との比較が可能であり、図－１を見るとほとんどその差がないことがわかる。また**図－２**は、図－１の計算で用いた｛$k_i h$｝（i=1,･･･,4)の値を設定したときの本方程式の分散関係を求め、理論値（実線）と比較した結果である。横軸は無次元波数ｋｈ、縦軸は長波の波速との比で表してある。これを見ると、長波から深海波の広いｋｈの範囲にわたってほぼ完全に理論値と一致していることがわかる。ここで注目すべきことは、わずか４つのW_iの成分数で流速場を近似しているにもかかわらず、非常に広いスペクトル帯域をもつ波動場が本波動方程式によってこのように精度良く計算されるということである。その理由については、既に文献[1)]においていくつかの観点からの検討結果を報告しているが、ここではさらに流速の鉛直分布の近似度という観点からの検討結果について述べる。

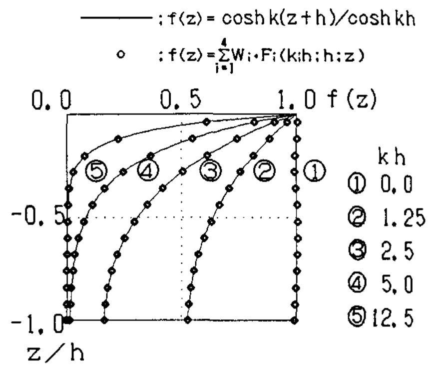
波動方程式の導出過程は、一般に流速場（および圧力場）の鉛直（ｚ）方向依存性に関して何等かの仮定を導入することにより、もとの３次元空間上で定義された基礎方程式系を平面２次元空間上の方程式系に変換する操作ということができる。従って、それによって得られる波動方程式の適用性は、流速場のz-profileの近似度によって基本的に左右されることになる。Boussinesq方程式ではｚの多項式系（通常２項）でz-profileを近似しているが、本波動方程式ではこれを双曲線関数を用いた式（１）の形で近似している。**図－３**は上記の４つのW_i成分により、任意の波数ｋｈの波に対する水平流速の鉛直分布形（実線）がどの程度近似できているかを示したものである。これを見ると浅海域から深海波領域にいたるまでその鉛直分布形が、わずか４つの鉛直分布関数の合成によりかなり良く近似できていることがわかる。



図－１　不規則波の計算結果：ζとｕの空間波形



図－２　本方程式の分散関係と理論値との比較



図－３　鉛直分布形の近似度

４．おわりに

新たに導いた強分散性波動方程式の基本的な特性に関する検討を行い、波動場の分散性ならびに流速場の鉛直分布に関して、広いスペクトル帯域上でかなり精度良く表現できることを確かめた。ここでは水平２次元の線形不規則波動場を対象として論じたが、Galerkin法に基づく定式化の性質からいって、本波動方程式を非一様水深上の任意の非線形不規則波動場を対象に拡張することに本質的な障害はない。その意味で、本波動方程式は一般性のある強非線形・強分散性波動方程式へと発展させていくことが可能である。

参考文献：１）灘岡和夫・中川康之：Galerkin法に基づく強分散性波動方程式の導出と背景について、東京工業大学土木工学科研究報告、No.44,1991（印刷中）