II-480　平面波浪場の波数ベクトルの計算法

大阪工業大学 後野正雄

まえがき:平面波浪場の波変形を求める場合、線水変形と屈折だけを考慮したエネルギー保存に基づく式を用いた格子点法、波向き線法がある。このエネルギー保存を用いる場合波向きを決定する必要がある。通常波向きは波数の非回転の式を用いて計算される。本報告は波向きの計算に対して、波数の非回転とは異なる方程式系により波数ベクトルを求める方法について述べたものである。この方法は、緩勾配方程式から導かれるアイコナール方程式を用いることにより、回折の効果を取り入れることが可能である。ここでは回折の効果を取り入れた波数ベクトルの方程式について述べる。

エネルギー保存型の緩勾配方程式:緩勾配方程式は位相関数Ｓを導入することによって次のようなエネルギー保存の形式に変形される。

$$\nabla\cdot(C C g A^2\boldsymbol{K})=0 \qquad (1)$$

$$(\lambda^2-k^2)C C g A+\nabla\cdot(C C g\nabla A)=0 \qquad (2)$$

$$k=|\boldsymbol{K}|=|\nabla S|,\qquad \sigma=-\partial S/\partial t,\qquad \sigma^2=g\lambda\tanh\lambda d$$

$$\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)$$

ここで、Ａ;速度ポテンシャルの振幅、σ;角周波数、$\boldsymbol{K}$;波数ベクトル、ｋ;$\boldsymbol{K}$の絶対値、λ;固有値、Ｃ，Ｃｇ:λによる波速，群速度、ｄ;水深である。さらに、$\beta^2=CCgA^2$なる変数を用いると(1)(2)式は水底勾配の2乗のオーダーの誤差範囲内で(3)(4)式のように変形できる。

$$\nabla\cdot(\beta^2\boldsymbol{K})=0 \qquad (3)$$

$$\lambda^2-k^2+\nabla^2\beta/\beta=0 \qquad (4)$$

(3)式はエネルギー保存を表す式であり、(4)式はアイコナール方程式であり、第3項を無視すると格子点法等で用いられる屈折、浅水変形のみを考慮した式と等しくなる。本研究では、波数ベクトルを求めるために次に述べる波数の保存式を用いる。

波数ベクトルの方程式:定常状態での波数の保存式は周期が一定であることを表す次式である。

$$\nabla\sigma=0 \qquad (5)$$

分散関係式より，σは水深ｄと固有値λの関数であるので，$\nabla\sigma$は次のように書ける．

$$\nabla\sigma=\partial\sigma/\partial\lambda\,\nabla\lambda+\partial\sigma/\partial d\,\nabla d \qquad (6)$$

$$=Cg\nabla\lambda+\sigma(2n-1)\nabla d/d$$

さらに，$\nabla\lambda$に(4)式を代入し、波数の非回転性を用いると、最終的に次のように変形できる．

$$(\boldsymbol{K}\cdot\nabla)\boldsymbol{K}-\nabla(\nabla^2\beta/2\beta)+P(\lambda,d)\nabla d=0 \qquad (7)$$

$$P(\lambda,d)=\lambda^2(2n-1)/(2nd),\qquad n=Cg/C$$

(7)式はベクトル式であり、x、y方向のそれぞれのスカラー式に分けられる。すなわち、波数ベクトルの成分$\boldsymbol{K}=(K_x、K_y)$のそれぞれについて解くことができる。これは、(4)式において第3項を無視し、波数の非回転の式を用いて波向きの角度だけを解く格子点法と大きく異なる。また、(7)式第3項の回折の効果を考慮すると、波数ベクトルの絶対値$|\boldsymbol{K}|$はλとは一致するとは限らない。

数値計算手法:計算の基本的なアルゴリズムは次のとおりである。

(a) (7)式の第２項を無視して波数ベクトルを求める。

(b) (3)式を解き、βを求める。

(c) $\nabla^2\beta/\beta$を計算する。このときβは５点の重みつき平均を用いた。これは(7)式第２項が３階の微分値であり、微小な変動が大きく影響するからである。

(d) 第２項を考慮した(7)式を解き、新たな波数ベクトルを求める。

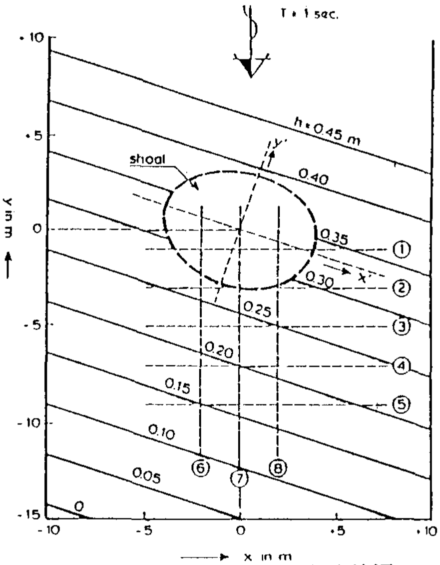
(e) 新しい波数ベクトルを用いて、再び(3)式をβについて解く。

ここで(b)の段階での解は格子点法の解とほぼ一致する。また回折を考慮した厳密な解を求めるためには(c)以下の過程を変数が収束するまで繰り返す必要がある。しかし、本研究ではこの繰り返しを3回限りとした。これは、繰返しを行っていくと、波向きが沖向きに変化したり、βが負になる等の現実にはありえない解が出てしまうからである。この原因については現在のところ不明である。なお差分の手法としてはMacCormack法を改良して用いた。,MacCormack法は本来非定常な保存式に用いられるものであるが、ここでは主にy軸の負の方向に進む波を対象とし、y軸を時間軸のように取り扱ったものである。

数値計算結果:計算はBercoff et.al.が行った水槽実験に対して実施した。図‐１は実験の概要と計測された断面を示したもので、参考のために示した。図‐２～図‐４はBercoffらの実験、計算結果と本計算手

法による結果を示したもので、それぞれ図－１中の⑤⑥⑦で示される断面での波高比を表したものである。図中の●はBercoff et.al.による実験値、○-○は回折を考慮した本計算手法によるもの、●-●は回折を無視した本手法による解である。これらの図より、回折を無視した場合の結果より、回折を考慮した方が実験結果に近く、良好な結果を示している。とくに波向きが集中し、波高が増大する部分においては実験結果と良く一致していることが分かる。しかし、図－３に見られるように波高が小さくなる部分は精度良く計算できているとは言えない。

参考文献：Bercoff, J.C.W. , Booy, N., and Radder, A.C.:Verification of Numerical Wave Propagation Models for Simple Harmonic Liner Water Waves, Coastal Eng., vol.6, pp255-279, 1982
MacCormack, R.W.;The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Creating, AIAA Paper No.69-354,1969



図－１　Bercoff らの実験状況

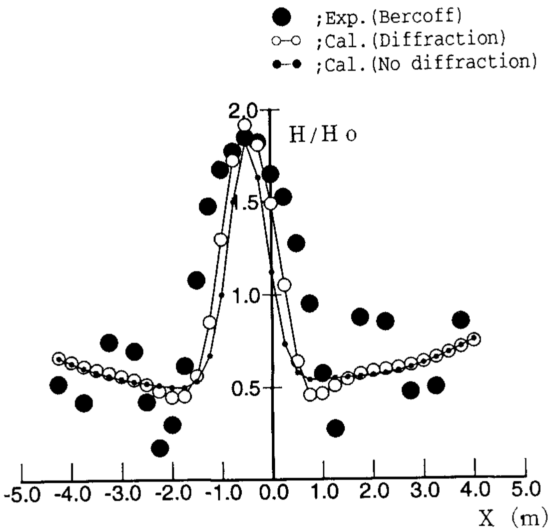


図-2　断面⑤の波高分布（Y＝－７．０m）

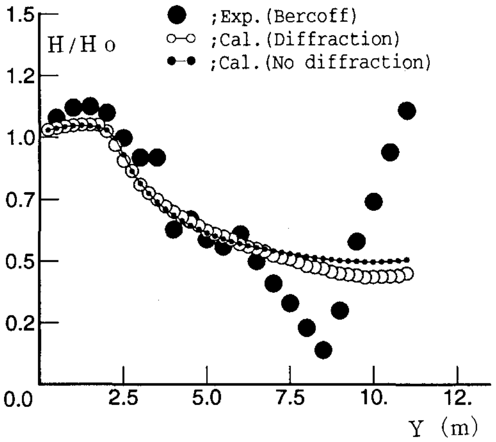


図-3　断面⑥の波高分布（X＝－２．０m）

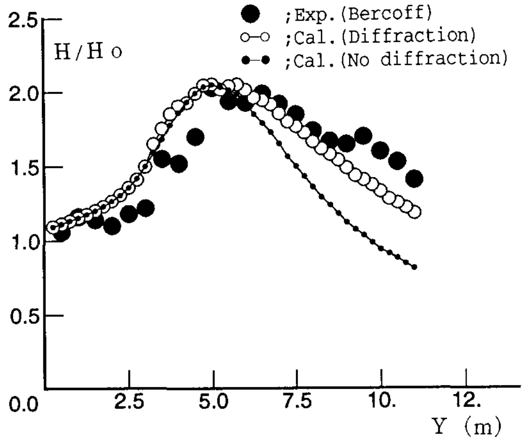


図-4　断面⑦の波高分布（X＝－０．０m）