II-309　異方性２変数離散分布の理論　――負の二項分布を中心として――

名古屋工業大学　○正会員　長尾正志、学生員　小西宏和、岐阜工業高専　正会員　鈴木正人

１．　はしがき

水資源開発施設の機能評価や操作法の研究をする場合、その入力である河川流量の確率分布を理論モデルで表わす必要がよくある。地点間の流量の相互相関を勘案でき、上限が有限で流況に応じて分布形状が変化させうる離散型モデルとして、著者らは異方性２変数の二項分布の理論モデルを提案した。しかし、二項分布では平均＞分散の制約があるので、平均＜分散の場合には、負の二項分布として扱わねばならない。ここではその延長として、上限が無限大で、相互相関のある２変数負の二項分布およびその特例としての幾何分布が解析的に誘導できることを見出したので、その結果について報告する。

２．　確率母関数

２変数の二項分布の結果から、母数ｋ（ｋ＞０）が共通で形状母数a_i（$i=1,2$）の異なる２変数負の二項分布に対する変量X_1、X_2の確率母関数（p.g.f.）を次式で与え、これを解析の出発点とする。

$$G_{X1,X2}(z_1, z_2) = [A + B_1 z_1 + B_2 z_2 + C z_1 z_2]^{-k} \quad (1)$$

ただし、A、B_1、B_2、Cはある定数で、$A + B_1 + B_2 + C = 1$　(２)

である。これより、X_1についての周辺分布の確率母関数は、次式のようになる。

$$G_{X1}(z_1) = [G_{X1,X2}(z_1, z_2)]_{z2=1} = [(A+B_2) + (B_1 + C) z_1]^{-k} \quad (3)$$

また、$X_2 = s$を与えたときのX_1の条件付き確率母関数は次式で求められる。

$$G_{X1|X2=s}(z_1) = [(\partial^s/\partial z_2^{\,s}) G_{X1,X2}(z_1, z_2) / (\partial^s/\partial z_2^{\,s}) G_{X2}(z_2)]_{z2=0}$$
$$= \{(A + B_1 z_1)/(A+B_1)\}^{-k-s} \cdot \{(B_2 + C z_1)/(B_2 + C)\}^{s} \quad (4)$$

３．　周辺分布とその母数

$$-(B_i + C) = a_i > 0,\ p_i = 1/(1+a_i),\ q_i = 1 - p_i \quad (i=1,2) \quad (5)$$

とおくと、X_iの周辺分布は、$P_{Xi}(s) = [\partial^s G_{Xi}(z_i)/\partial z_i^{\,s}]_{zi=0}/s\,!$で求められる。

$$P_{Xi}(x_i) = {}_{x_i+k-1}C_{x_i} \cdot (p_i)^k (q_i)^{x_i} \quad (x_i = 0, 1, 2, \cdots;\ i=1,2) \quad (6)$$

これより、その平均、分散はつぎのように求まる。

$$E(X_i) = k a_i,\quad V(X_i) = k a_i (1 + a_i),\ (i=1,2) \quad (7)$$

同様に歪係数が３次の積率より誘導される。

$$C_s(X_i) = (1 + 2a_i)/\{k a_i (1+a_i)\}^{1/2},\ (i=1,2) \quad (8)$$

４．　相互相関係数

さらに、X_1とX_2との間の相互相関係数を求めた結果はつぎのとおりである。

$$\rho = (a_1 a_2 - C)/\{a_1 a_2 (1+a_1)(1+a_2)\}^{1/2} \quad (9)$$

なお、この相互相関係数には、以下の制限があることが導かれる。

$$\rho < \min[\{a_1(1+a_2)/(a_2(1+a_1))\}^{1/2},\ \{a_2(1+a_1)/(a_1(1+a_2))\}^{1/2}]$$

５．　条件付き分布

（４）式の条件付き分布の確率母関数をもとに、条件付き分布を誘導する。なお、条件付き分布とその確率母関数の関係は以下のようである。

$$p_{ij} \equiv Pr[X_1 = j \mid X_2 = i] = [(\partial^j/\partial z^j) G_{X1=j|X2=i}(z)]_{z=0}/j\,! \quad (10)$$

計算の便宜上、$G_{X1=j|X2=i}(z)$の内容を、ｚに関係する項と無関係な項Ｈ（ｚ）に分けて表現する。

$$G \equiv \{(A+B_1)^{k+i}/(B_2+C)^{i}\} \cdot H(z),\ H(z) \equiv (A + B_1 z)^{-k-i}(B_2 + Cz)^{i}$$

算出の手順としては、(10)式のｊ次の微分を求めるために、ｊ＝０，１，２，・・・と順に計算を進め、その結果から一般形を推定する。

Ｉ　ｊ＝０のとき

$$p_{i0} = [G_{X1=0|X2=i}(z)]_{z=0}/0\,! = \{B_2/(B_2+C)\}^{i}\{(A+B_1)/A\}^{k+i} \quad (11)$$

Ⅱ　$j=1$のとき

$H'(0)=(-k-i)A^{-k-i-1}B_1 B_2^{i}+iA^{-k-i}B_2^{i-1}C$　より

$$p_{i1}=[(A+B_1)^{k+i}B_2^{i-1}/\{(B_2+C)^{i}A^{k+i+1}\}][-(k+i)B_1B_2+iAC] \quad (12)$$

Ⅲ　$j=2$のとき

$H''(0)/2!=A^{-k-i-2}B_2^{i-2}(B_1B_2)^2\times[(-k-i)(-k-i-1)/2!+$
$\{2i(-k-i)/2!\}\{AC/(B_1B_2)\}+\{i(i-1)/2!\}\{AC/(B_1B_2)\}^2]$

上記右辺の［　］について、一般的な表現を試みる。　［　］＝

$$=\sum_{s=0}^{2}(-1)^{s+2}[\Gamma(k+i+2-s)\cdot i!/\{\Gamma(k+i)\cdot s!\cdot(i-s)!\cdot(2-s)!\}]\times\{(AC/(B_1B_2))\}^{s}$$

この結果を$j=j$まで拡張して、p_{ij}の一般形が以下のように得られる。$\Gamma(x)$はガンマ関数である。

$$p_{ij}=\frac{(A+B_1)^{k+i}}{(B_2+C)^{i}}\frac{B_2^{i-j}(B_1B_2)^{j}}{A^{k+i+j}}\times$$
$$\sum_{s=0}^{\min(i,j)}(-1)^{s+j}\Gamma(k+i+j-s)\cdot i!/\{\Gamma(k+i)\cdot s!\cdot(i-s)!\cdot(j-s)!\}]\times\{(AC/(B_1B_2))\}^{s} \quad (13)$$

6．　条件付き変量の平均、分散

式（4）の条件付き確率母関数より、$X_2=s$を指定した場合の条件付き変量X_1の平均、および分散が得られる。まず、条件付き平均は

$$\mu_1'(X_1|X_2=s)=-kB_1/(A+B_1)+[C/(B_2+C)-\{B_1/(A+B_1)\}]s \quad (14)$$

であるから、指定変量$X_2=s$に関して線形である。すなわち、回帰曲線は直線回帰である。ついで、条件付き分散は、次式となる。　$\mu_2(X_1|X_2=s)=$

$$-kAB_1/(A+B_1)^2+[B_2C/(B_2+C)^2-\{AB_1/(A+B_1)^2\}]s \quad (15)$$

7．　積率解としての母数推定

（7）式より、まず形状母数a_1、a_2を、$\hat{a}_i=V(X_i)/E(X_i)-1$　　$(i=1,2)$ (16)

として推定した後、母数kを、次式で求める。

$$\hat{k}=\{E(X_1)+E(X_2)\}/(\hat{a}_1+\hat{a}_2) \quad (17)$$

つぎに（9）式より、相関係数ρに標本相関係数を使うと、以下の諸式でC、B_i、Aが分かる。

$$\hat{C}=\hat{a}_1\hat{a}_2-\hat{\rho}\{\hat{a}_1\hat{a}_2(1+\hat{a}_1)(1+\hat{a}_2)\}^{1/2} \quad (18)$$

$$\hat{B}_i=-\hat{a}_i-\hat{C},\ (i=1,2) \quad (19) \qquad \hat{A}=1-\hat{B}_1-\hat{B}_2-\hat{C} \quad (20)$$

なお、以上の結果でk＝1とおいた幾何分布の周辺分布や平均、分散、条件付き分布は以下となる。

$$P_{xi}(x_i)=\{a_i/(1+a_i)\}^{x_i},\quad E(X_i)=a_i,\quad V(X_i)=a_i(1+a_i)$$

$$p_{ij}=a_1^{j}(1+a_1)^{-1-j}I_1^{-1-i-j}I_3^{i}I_4^{j}\times$$
$$\sum_{s=0}^{\min(i,j)}(-1)^{s}\frac{(i+j-s)!}{s!(i-s)!(j-s)!}[I_1I_2/(I_3I_4)]^{s} \quad (21)$$

ただし
$$I_1\equiv1-\rho[a_1a_2/\{(1+a_1)(1+a_2)\}]^{1/2}$$
$$I_2\equiv1-\rho[(1+a_1)(1+a_2)/(a_1a_2)]^{1/2} \quad (22)$$
$$I_3\equiv1-\rho[a_1(1+a_2)/\{a_2(1+a_1)\}]^{1/2}$$
$$I_4\equiv1-\rho[a_2(1+a_1)/\{a_1(1+a_2)\}]^{1/2}$$

参考文献　　長尾・小西：形状母数の異なる２変数二項分布の理論モデル、平成３年度土木学会中部支部研究発表会講演概要集、１９９２年3月、ｐｐ．１５９－１６０