

## II-288 常流・射流の混在する流れの数値計算法に関する研究

岐阜大学工学部 正員 河村三郎  
 岐阜大学工学部 正員 中谷 剛  
 岐阜大学工学部 学生員 前田哲史

1. はじめに 山地河川流路工のような急勾配流路内の流れは常射流の混在する複雑な流れで、従来のように常流区間と射流区間を区別して計算を行うことは極めて困難である。そこで本研究では、急勾配流路の水理学的特性を明らかにするために跳水を伴う流れの数値計算法を提案し、急勾配流路の防災機能の評価に役立てようとするものである。

2. 基礎式と数値計算法 基礎方程式として次に示す連続式と運動方程式を採用する。

$$U_t + E_x = C \quad (1)$$

$$U = \left[ \frac{A}{Q} \right], E = \left[ \frac{Q}{(P/\rho)_b + (Q^2/A)} \right], C = \left[ \frac{0}{gA(i_0 - I_f)} \right] \quad \text{ただし、} I_f = \frac{n^2 Q |Q|}{A^2 R^{4/3}} \quad (2)$$

ここに、 $i_0$ :水路床勾配、 $I_f$ :エネルギー損失勾配、 $A$ :流積、 $R$ :径深、 $n$ :Manningの粗度係数、 $P$ :全水圧、 $\rho$ :流水の密度、 $Q$ :流量である。

跳水を伴う流れの数値計算に非常に有効であると考えられている方法に衝撃波獲得法と呼ばれるものがある。代表的な差分スキームには(a)Lax法、(b)2step Lax-Wendroff法、(c)MacCormack法がある。これらの各種差分スキームの特性を非粘性Burgers方程式によって調べる。その結果を図1(a)から(c)に示す。本研究では2次精度の差分スキームのうち数値振動の振幅が小さく、格子点上の値だけで差分スキームを記述できるという計算上の利点もあるMacCormack法を採用する。MacCormack法を利用する場合、その際物理的に意味の無い数値振動を生じる。そのため、差分スキームをTVD形式に書き換えて数値振動を抑えることを試みた。数値実験の結果、図1(d)にみられるように若干不連続面は鈍るが、完全に数値振動を抑えることができた。TVD形式のMacCormack法は次のように表される。

$$\text{予測子段階: } \bar{U}_j = U_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_j^n - E_{j-1}^n) + \Delta t C_j^n \quad (3)$$

$$\text{修正子段階: } U_j^{n+1} = \frac{1}{2} (U_j^n + \bar{U}_j) - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\bar{E}_{j+1} - \bar{E}_j) + \frac{\Delta t}{2} \bar{C}_j + \text{TVD}_j \quad (4)$$

$$\text{ただし、} \bar{E}_j = E(\bar{U}_j), \bar{C}_j = C(\bar{U}_j), \text{TVD}_j = \{G^+[r_j^+]+G^-[r_{j+1}^-]\} \Delta U_{j+1/2}^n - \{G^+[r_{j-1}^-]+G^-[r_j^+]\} \Delta U_{j-1/2}^n$$

$$\Delta U_{j+1/2}^n = U_{j+1}^n - U_j^n, r_j^+ = 1/r_j^- = \Delta U_{j-1/2}^n / \Delta U_{j+1/2}^n, G^\pm[r_j^\pm] = \frac{1}{2} \{1 - |\nu|\} [1 - \phi(r_j^\pm)]$$

$$\nu = \{\max(U_j + \sqrt{gh_j})\} \frac{\Delta t}{\Delta x}, \phi(r_j) = \begin{cases} \min(2r_j, 1), & r_j > 0 \\ 0, & r_j \leq 0 \end{cases} \quad (\text{制限関数})$$

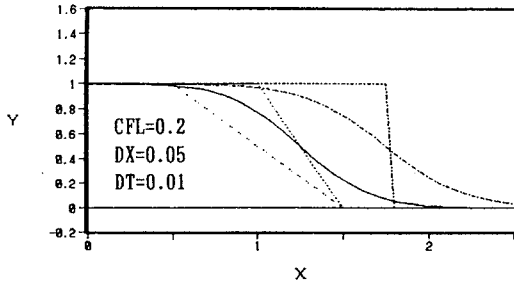
MacCormack法による数値計算が跳水を伴う流れを正確に捕らえることができるかどうかを確認するためにアクリル製の実験水路を用いて実験を行った。実験水路の勾配は1/100, 1/50, 1/30, 1/20, 1/10の5ケースとした。

3. 計算結果 計算値と実験値の比較を図2に示す。TVD形式のMacCormack法の適用により物理的に意味の無い数値振動は完全に制御することができた。しかし、計算値と実験値を比較すると跳水の発生位置は勾配の大きさによって±20cm程度の誤差がみられた。その原因は跳水の不安定さにあるものと思われるが、そのような不安定な跳水において計算の中で静水圧分布を仮定していることに問題があると考え、静水圧分布からのズレを考慮するために運動方程式にBoussinesq項を導入して改善をはかった。Boussinesq項を導入した運動方程式は次のようになる。

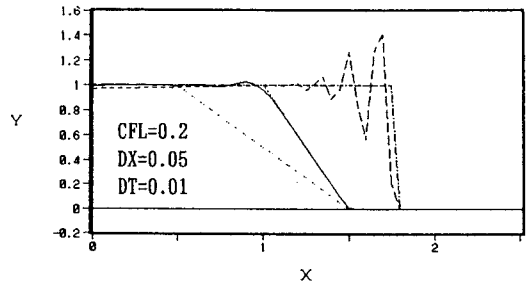
$$\text{運動方程式: } \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ hu^2 + \frac{1}{2} gh^2 - \frac{h^3}{3} \left[ -\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \right] \right\} = gh(i_0 - S_f) \quad (5)$$

その結果、運動方程式にBoussinesq項を導入しても図3に示されたようにほとんど計算値に変化はみられず、改善はみられなかった。TVD-MacCormack法の適用例として落差工のある流路工の計算を図4に示す。

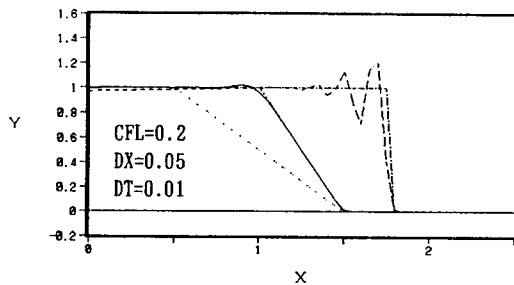
4. おわりに MacCormack法で数値計算を行うと不連続部で数値振動が生じる。これを抑えるために差分スキームをTVD形式に書き換えて数値実験を行った。その結果、数値振動は完全に抑えられTVDが有効であることが理解された。しかし、跳水の発生位置に誤差が生じた。そこで、圧力分布に対しての補正を行うために運動方程式にBoussinesq項を導入したが、その効果はみられなかった。跳水後の水深は精度よく計算が可能であった。



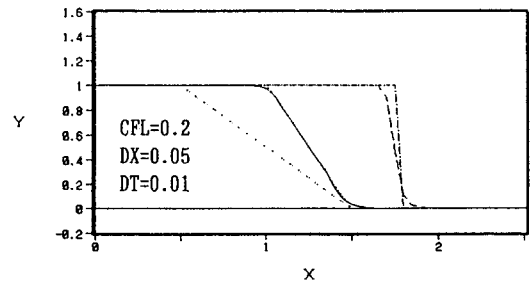
(a) Lax法



(b) 2段階Lax-Wendroff法



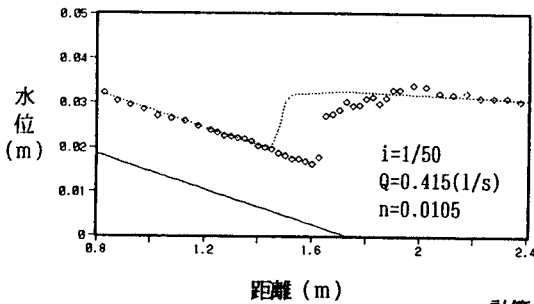
(c) MacCormack法



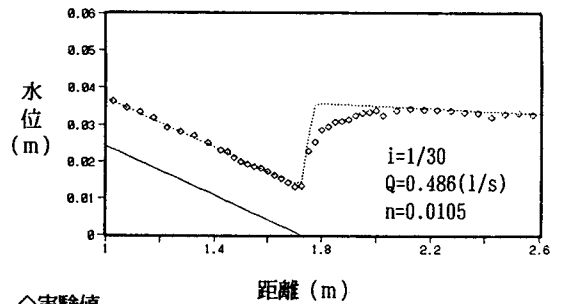
(d) TVD形式のMacCormack法

図-1 不連続部における特性

--- 初期値 --- 厳密解(50step) — 各種差分法における解(50step)  
 --- 厳密解(150step) --- 各種差分法における解(150step)



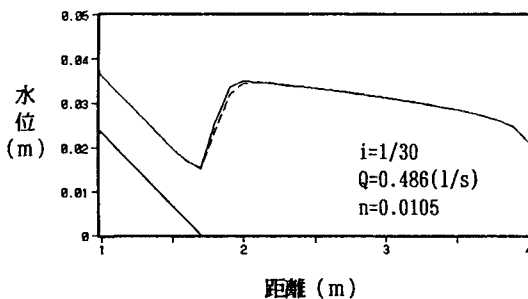
(a)



(b)

図-2 跳水の計算

(dt=0.01s, dx=0.025m)

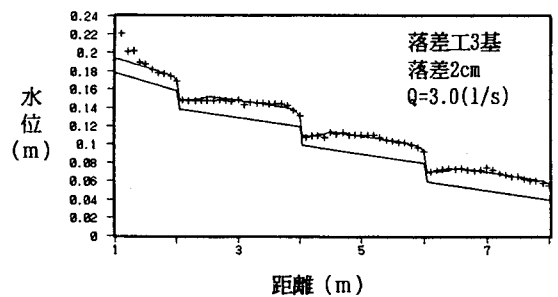


距離 (m)

— 静水圧分布仮定 -- Boussinesq項の導入

図-3 跳水の計算

(dt=0.01s, dx=0.100m)



距離 (m)

— 計算値 + 実験値

図-4 落差工のある流路工の計算

(dt=0.01s, dx=0.05m)