II-286

有限要素法による Boussinesq 方程式の解析

中央大学　学生員　鄭　榮裕
中央大学　正　員　川原睦人

1．はじめに

本研究では、有限要素法によって波頂曲率まで考慮した Boussinesq 方程式を解析する手法について検討を行う。本手法は、基礎方程式について，空間方向に対して一次の三角形要素に基づく有限要素法で離散化を行い、時間方向に対しては、運動方程式に対し準陽的オイラー法を、連続方程式に対しては陽的オイラー法を用いることによって計算を進めるものである。ここでは、本手法の計算手順および検討のために行った一次元と二次元の水路モデルにおける波動伝播解析の結果を示す。

2．基礎方程式

基礎方程式として Boussinesq 方程式を用いるものとする。運動方程式と連続方程式は、以下のように書き表すことができる。

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial x}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+\frac{\partial^3 u}{\partial x\partial y\partial t}\right) \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+g\frac{\partial \eta}{\partial y}=\frac{h^2}{3}\left(\frac{\partial^3 v}{\partial y^2\partial t}+\frac{\partial^3 v}{\partial x\partial y\partial t}\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\{(h+\eta)u\}+\frac{\partial}{\partial y}\{(h+\eta)v\}=0 \tag{3}$$

ここに、u、vは流速、ηは水位変動量、h は水深、gは重力加速度である。式 (1),(2) の右辺は圧力に対する補正項すなわち波頂曲率に関する項である。

3．有限要素法の適用

基礎方程式 (1),(2),(3) に重み付き残差法を適用し、一次の形状関数を用いて空間方向の離散化を行う。また、時間微分項について前進差分を適用すると、以下のような有限要素方程式が得られる。

$$[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(K_{\alpha x\beta x}+G_{\alpha x\beta y})]u^{n+1}=[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(K_{\alpha x\beta x}+G_{\alpha x\beta y})]u^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}u^nu^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}v^nu^n-\Delta tgA_{\alpha\beta x}\eta_n \tag{4}$$

$$[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(P_{\alpha y\beta y}+Q_{\alpha y\beta x})]v^{n+1}=[M_{\alpha\beta}+\frac{h^2}{3}(P_{\alpha y\beta y}+Q_{\alpha y\beta x})]v^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}u^nv^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}v^nv^n-\Delta tgZ_{\alpha\beta y}\eta_n \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\eta_{n+1}=M_{\alpha\beta}\eta_n-\Delta tN_{\alpha\beta x\gamma}H^nu^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}H^nu^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}H^nv^n-\Delta tJ_{\alpha\beta y\gamma}H^nv^n \tag{6}$$

ここで、添字 n は、各々の時間ステップを表している。式 (6) はこのままでは解が不安定となり、答を得ない。従って、式 (6) に対しては、陽的スキームを適用するものとする。集中化行列と混合行列を用いれば、以下のようになる。

$$\tilde{M}_{\alpha\beta}\eta_{n+1}=\tilde{M}_{\alpha\beta}\eta_n-\Delta tN_{\alpha\beta x\gamma}H^nu^n-\Delta tL_{\alpha\beta\gamma x}H^nu^n-\Delta tI_{\alpha\beta\gamma y}H^nv^n-\Delta tJ_{\alpha\beta y\gamma}H^nv^n \tag{7}$$

$\bar{M}$は集中化質量行列を表す。また、$\tilde{M}$は混合行列である。

$$\tilde{M}=e\bar{M}+(1-e)M \tag{8}$$

ここに、e は混合係数であり、陽的解法を用いる場合の人工粘性による誤差を緩和するものである。

4．数値解析例

数値計算例１として、一次元の水路モデルを用い 波動の伝播解析を行う。有限要素分割を図－１に示す。水深は一定とする。境界条件は、境界 AD 、 BC で法線方向の流速を零とする。図－２に水位の初期状態を表す。図－３に計算された水位の結果を示す。本手法は Long[3] の結果と良く一致していることがわかる。

数値計算例2として、図－4のような水路モデルを用い波動の伝播解析を行う。有限要素分割を図－5に示す。境界条件は、境界AD、BC、CDで法線方向の流速を零とする。境界ABで周期10秒の引きから始まる一周期の正弦波を水路進行方向に対し約20° 左側に傾かせて与えた。図－6に本手法の解析結果と実験値[4]の比較である。図より、解析した波動の伝播は実験の傾向とよく一致している。

5. おわりに

Boussinesq方程式の数値解析手法として、運動方程式には準陽解法を、連続方程式には陽解法を提案した。本手法の適用性を検証するために矩型水路モデルにおける波動伝播解析の結果と実験値との比較を行った。解析結果より非線形分散波の問題に対して本手法の妥当性を確認した。

REFERENCES:

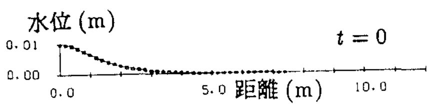
[1] M. Kawahara, ' On finite element methods in shallow water long wave flow analysis', in Computational Methods in Nonlinear Mechanics (Ed. J. T. Oden), North-Holland, (1980).

[2] M. Kawahara, H. Hirano, K, Kubota and K. Inagaki, ' Selective Lumping Finite Element Method For Shallow Water Flow', J. Numer. Meth . Fluid., 12, pp, 331-359 (1982)

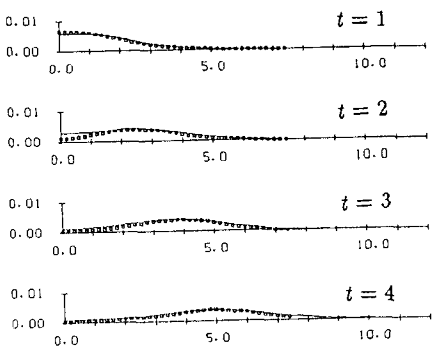
[3] Robert R. Long, ' The initial-value problem for long waves of finite amplitude', J. Fluid Mech, Vol.20, part 1, pp.161-170 (1964).

[4] 今村、富沢、' 大型2次元水槽での非線形分散波の伝播 '、海岸工学論文集、135-139,(1990).

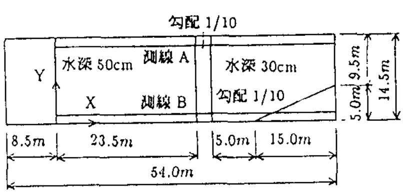
図－1　有限要素分割図 (解析例1)



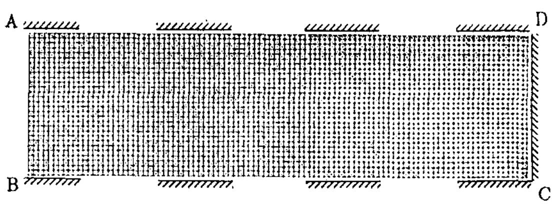
図－2　初期条件



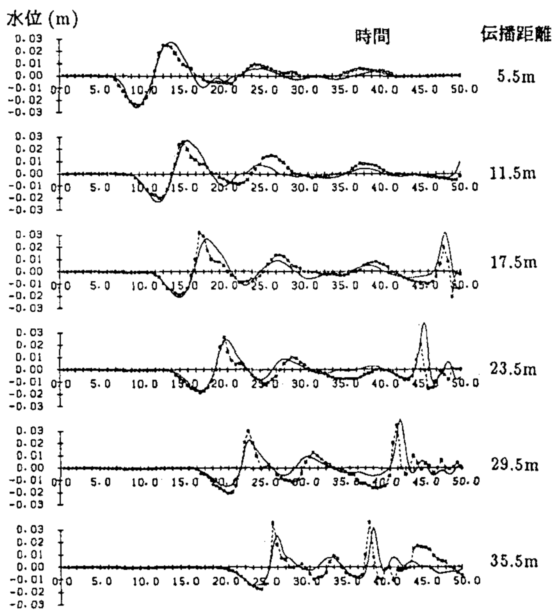
図－3　時間波形の計算と Long との比較



図－4　解析モデル図



図－5　有限要素分割図 (解析例2)



図－6　測線Aでの時間波形の計算と実験値との比較