II-285　移流問題における各種テイラーガラーキン有限要素法の精度と安定性の比較検討

中央大学　学生員　金子賢一
中央大学　正会員　樫山和男
中央大学　正会員　江　春波

1. はじめに

高レイノルズ数流れを高精度に解くために、これまでに様々な移流項の離散化手法が提案されている。これらの中でテイラーガラーキン法は、上流型手法のように人工粘性を調節するためのパラメータを導入することなく、高精度に解析することのできる手法として注目されている。本報告では、そのテイラーガラーキン法に基づいた幾つかの高次精度（２次以上）を有する計算法を、移流方程式に対して適用してその精度と安定性について比較検討を行った結果について述べるものである。

2. 基礎方程式

基礎方程式として、移流方程式を用いる。

$$C_{,t} + u_i C_{,i} = 0 \tag{1}$$

ただし、Cは濃度，uは流速を示す。

3. 有限要素法による離散化

空間方向の離散化には、通常のガラーキン法を適用し要素としては三角形１次要素を用いた。一方、時間方向の離散化 には、以下に示す２次以上の精度を持つ四つの方法を用いた。離散化された有限要素方程式は次のようになる。

1)　$TG2$ 法[1]

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^n - \frac{\Delta t^2}{2} u_i^2 A_{\alpha_i\beta_i} C_\beta^n \tag{2}$$

2)　$TG3$ 法[1]

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^n - \frac{\Delta t^2}{3} u_i^2 A_{\alpha_i\beta_i} C_\beta^n - \frac{\Delta t^2}{6} u_i^2 A_{\alpha_i\beta_i} C_\beta^{n+1} \tag{3}$$

3)　$Two-step$ 法

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+\frac{1}{2}} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^n \tag{4}$$

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^{n+\frac{1}{2}} \tag{5}$$

4)　$Three-step$ 法

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+\frac{1}{3}} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \frac{\Delta t}{3} u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^n \tag{6}$$

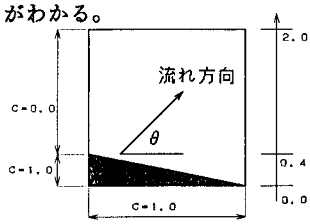
$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+\frac{1}{2}} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \frac{\Delta t}{2} u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^{n+\frac{1}{3}} \tag{7}$$

$$M_{\alpha\beta}C_\beta^{n+1} = M_{\alpha\beta}C_\beta^n - \Delta t u_i H_{\alpha\beta_i} C_\beta^{n+\frac{1}{2}} \tag{8}$$

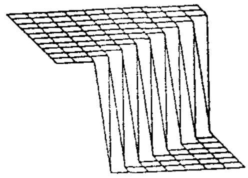
各時刻における濃度を求めるにあたり、左辺側質量行列を集中化させる従来の陽解法は用いずに、反復法（ヤコビ法）を用いている。

4. 数値解析例と考察

数値解析例として、図－１に示す移流問題を取り上げる。流れ場の条件及び境界条件は図－１に示すようである。流れ方向は一定で、大きさを１とする。解析例として$\theta = 45°$の場合を取り上げる。要素分割としては、10×10(メッシュ1)，20×20(メッシュ2) の２通りを用いた。図－２に定常状態における厳密解を示す。また図－３にメッシュ１を用いた場合の各種解法による結果を示す。また図－４にメッシュ２を用いた場合の結果を示す。なお、(　) 内の数値は左から順に、解析に用いた手法、Δt，cpu 時間を示している。これらの結果から次のことがわかる。(1)$Two-step$ 法, $Three-step$ 法は前方に減衰が見られるのに対して $TG2$ 法, $TG3$ 法は後方にやや振動がみられる。(2) メッシュサイズを細かくすると、どの手法においても厳密解に近ずき、その精度はほとんど差異のないものとなる。(3)$Three-step$ 法は、他の手法に比べΔt を長くとることが出来、安定性に優れていることがわかる。



図－１： 計算条件



図－２： 厳密解

5. おわりに

本報告において幾つかの高次精度のテイラーガラーキン法を、移流方程式に対して適用し、その精度と安定性について比較検討した。その結果、精度の面からみるとメッシュサイズを細かくとった場合に、どの手法も厳密解に近ずき、ほとんど差異のないものとなった。また安定性の面からみると、最もΔt を大きくとれる $Three-step$ 法が良いことがわかった。今後、これらの手法を用いて実際問題の解析を行っていく予定である。

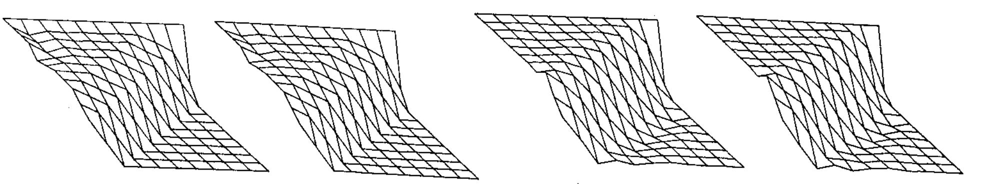
参考文献:

[1] JEAN DONEA : A Taylor-Galerkin Method for Convective Transport Problem (Int,J.Num.Meth.Eng.Vol.20,pp101-109(1984))

[2] 畑中勝守，江，川原：日科技連，第５回計算力学シンポジウム，pp75-80(1991)

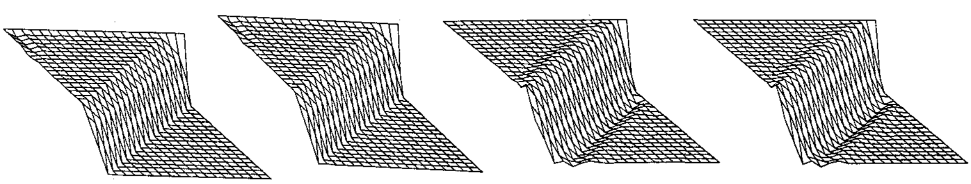
[3] 小澤善隆，登坂，角田:日科技連，第５回計算力学シンポジウム，pp145-150(1991)

[4] 金子賢一，渡辺，樫山，江：第19回関東支部技術研究発表会講演概要集，pp164-165(1992)



$(TG2, 0.0571s, 4.89s)$　$(TG3, 0.0667s, 5.78s)$　$(2Step, 0.0667s, 4.45s)$　$(3Step, 0.1333s, 3.89s)$

図－３： メッシュ１を用いた場合の結果



$(TG2, 0.0285s, 26.87s)$　$(TG3, 0.0333s, 35.46s)$　$(2Step, 0.0333s, 26.51s)$　$(3Step, 0.0667s, 20.67s)$

図－４： メッシュ２を用いた場合の結果