II-284　３段階テイラーガラーキン法を用いた非定常流体解析

中央大学　学生員　畑中　勝守
中央大学　正　員　江　　春波
中央大学　正　員　川原　睦人

1. はじめに

移流が卓越する流れ場に対する非定常有限要素解析手法として，数多くの手法が提案されてきている．[1-6] これらの中でも Lax-Wendroff (LW) 法は比較的初期の頃から検討されてきた手法の一つであり，有限要素法の分野では Taylor-Galerkin (TG) 法としても知られている手法である．この手法は時間に対して２次精度を有し，非常に簡便であり安定性に優れているという特徴を備えている．また，この手法は人工粘性を調節するためのパラメータといったものをいっさい取り込まずに解析することを目的としているため，対象とする問題によってパラメータを操作したり，パラメータの違いによって解析結果が異なるというような煩わしさが生じない手法である．この手法を更に進めて Donea らは３次精度のスキームを提案し，２次のスキームと併せて移流が卓越する流れ場の解析において数多くの検討を行ってきている．[2,3] しかしながら，Donea らのスキームは高次の時間微分項を空間微分に置き換えて処理する手法であるため，Navier-Stokes 問題へ直接適用するには粘性項の取り扱いがいささか面倒であった．そこで本報告では，Donea らの TG 法の検討を基に，高次スキームで，且つ移流が卓越する流れ場（例えば高レイノルズ流れ）の問題に対して安定であるようなスキームの開発として，３段階の簡便化された Taylor-Galerkin 法を非定常 Navier-Stokes 問題に適用することを提案し，この手法による数値解析例として２次元円柱周りの流れ解析を行ったものを報告する．

2. ３段階 TG 法による離散化

非定常・非圧縮粘性流体の基礎方程式として，Boussinesq 近似された Navier-Stokes 方程式と連続式を支配方程式として採用する．これらの基礎方程式に対して３段階 TG 法を適用し離散化すると，次のような有限要素方程式が得られる．

First Step

$$M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n+1/3} = M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n} - \frac{\Delta t}{3}\{K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}^{n}u_{\gamma i}^{n} - H_{\alpha i\beta}p_{\beta}^{n+1} + \frac{1}{Re}S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j}^{n}\} - \hat{\Sigma}_{\alpha i} \qquad (1)$$

Second Step

$$M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n+2/3} = M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n} - \frac{\Delta t}{2}\{K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}^{n+1/3}u_{\gamma i}^{n+1/3} - H_{\alpha i\beta}p_{\beta}^{n+1} + \frac{1}{Re}S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j}^{n+1/3}\} - \hat{\Sigma}_{\alpha i} \qquad (2)$$

Third Step

$$M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n+1} = M_{\alpha\beta}u_{\beta i}^{n} - \Delta t\{K_{\alpha\beta\gamma j}u_{\beta j}^{n+2/3}u_{\gamma i}^{n+2/3} - H_{\alpha i\beta}p_{\beta}^{n+1} + \frac{1}{Re}S_{\alpha i\beta j}u_{\beta j}^{n+2/3}\} - \hat{\Sigma}_{\alpha i} \qquad (3)$$

ここで，各方程式中の圧力 p_{β}^{n+1} は次の圧力ポアソン方程式からあらかじめ計算されたものを代入するものとする．

$$A_{\alpha i\beta i}p_{\beta}^{n+1} = -\frac{1}{Re}H_{\alpha\beta i}u_{\beta i}^{n} - K_{\alpha i\beta\gamma j}u_{\beta j}^{n}u_{\gamma i} - \hat{\Omega}_{\alpha i} \qquad (4)$$

この手法を移流方程式に適用した場合には３次までの精度が保証される事が確認されており [7]，本解析においてもほぼ同様であると考えられるものである．

3. ２次元円柱周りの流れ計算

３段階 TG 法の Navier-Stokes 問題への適用例として，２次元円柱周りの流れ計算を行う．解析における Re は 1,000 である。図－１に計算された抗力係数 (C_D)，揚力係数 (C_L) の時刻歴を示す。図－２には無次元時間 $T = 81$ および 83 における流速ベクトル図を示す。また、図－３には無次元時間 $T = 81$ および 83 における流れ関数分布図を示す。

5. おわりに

３段階 TG 法をを用いた Navier-Stokes 問題の応用例として，２次元円柱周りの流れ解析を示した．計算結果から，本手法の適用はいずれの場合もほぼ妥当であったことが解った．さきに述べたように，本手法は高次の時間微分項を含まないため，Navier-Stokes 方程式のような粘性項を含む方程式系に対する適用が容易であり，また，人工粘性を調節するパラメータを持たないといった点において他の高次スキームよりも有利であろう．今後は，これらのスキームを高レイノルズ流れに対して適用していきたいと考え

ている.

＜参考文献＞

[1] M. Kawahara, in *Proc. of JSCE, No. 253*, 95-107 (1976)

[2] J. Donea, in *Int. J. Num. Meth. in Engn. vol.20*, 101-119 (1984)

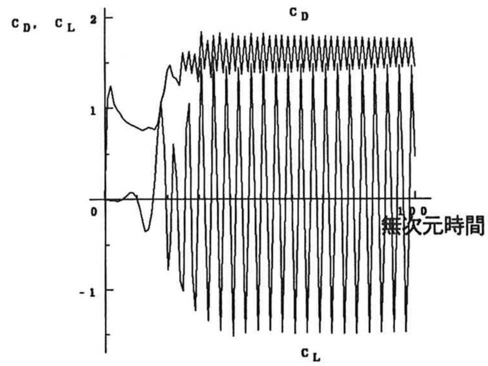
[3] J. Donea, L. Quartapelle and V. Selmin, in *Journal of Comp. Physics 70*, 463-499 (1987)

[4] P. M. Gresho, et al., in *Int. J. Num. Meth. Fluids vol.4*, 557-598 (1978)

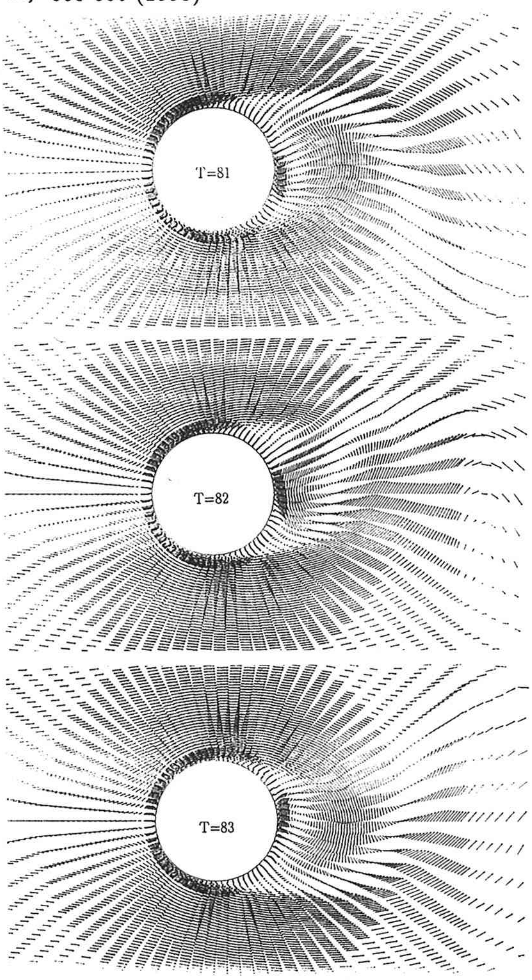
[5] M. Kawahara, et al., in *Finite Elements in Fluids vol.5*, 227-262 (1984)

[6] T.J.R. Hughes, et. al., in *Finite Elements in Fluids vol.4*, 47-65 (1979)

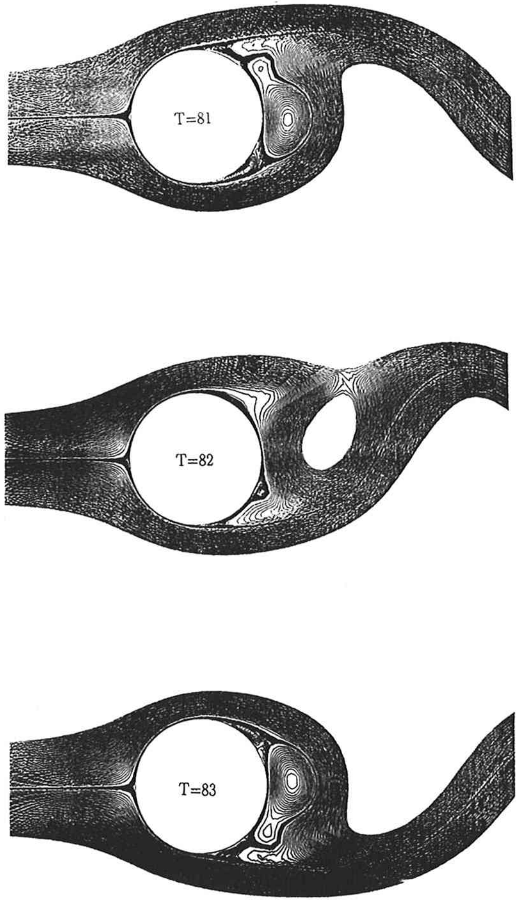
[7] 畑中，江，川原，第5回数値流体力学シンポジウム，553-556 (1990)



図－1　抗力、揚力係数の時刻歴



図－2　流速ベクトル図



図－3　流れ関数分布図