II-283　有限要素法による非圧縮性粘性流体解析と新提案補間関数

ハザマ技術研究所　正員　三原陽治

１．緒言

流体解析において、ナヴィエ・ストークス方程式の空間の離散化手法は差分法が一般によく用いられている。これは、ナヴィエ・ストークス方程式の持っている非線形性による離散定式化の難しさ、計算機記憶容量・計算速度の制約から有限要素法よりも差分法で流体解析は発達してきた。しかしながら、今日においては、離散定式化に対して様々な方法が提案され、また、計算機の記憶容量並びに計算速度が向上していく中で、流体解析への有限要素法の適用が本格化してきたといえる。本研究では、特別の乱流モデルを導入せずに、乱流現象を解析するための方法として、精度良く要素内速度を表現できる補間関数を提案した。ここで提案した補間関数とは、従来の補間関数に要素内での速度の回転の成分を付加したものである。以下にその定式化を述べる。

２．ナヴィエ・ストークス方程式定式化と新提案補間関数

N・S方程式をマトリックス表示すると、

$$\int_{\Omega}\rho\{\overset{*}{w}\}^T\{\dot{v}\}d\Omega+\int_{\Omega}\rho\{\overset{*}{w}\}^T[D]\{v\}d\Omega-\int_{\Omega}\{d\overset{*}{w}\}^T\{I_3\}p\,d\Omega+\int_{\Omega}\mu\{d\overset{*}{w}\}^T\{\tau\}d\Omega \tag{1}$$

$$=\int_{\Gamma_p}\{\overset{*}{w}\}^T\{\overline{t}\}d\Gamma+\int_{\Omega}\rho\{\overset{*}{w}\}^T\{f\}d\Omega$$ （境界条件・ガウスの定理によって式は整理されている）

但し、

$$\{w\}^T=\{w_1\ w_2\}\quad \{dw\}^T=\left[\frac{\partial w_1}{\partial x_1}\ \frac{\partial w_2}{\partial x_2}\ \frac{\partial w_1}{\partial x_2}+\frac{\partial w_2}{\partial x_1}\right]\quad \{\tau\}=\begin{bmatrix}\tau_{11}\\ \tau_{22}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial v_2}{\partial x_1}\end{bmatrix} \tag{2}$$

$$[D]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial v_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}\\ \dfrac{\partial v_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial v_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}$$

非圧縮性流体に対する連続の式並びにペナルティ方程式をマトリックス形式で示す。

$$\int_{\Omega}\{\overset{*}{q}\}^T(\{I_2\}^T\{dv\})d\Omega=0 \tag{3}$$

$$\int_{\Omega}\{\overset{*}{q}\}^T(\{I_2\}^T\{dv\})d\Omega=-\varepsilon\int_{\Omega}\{\overset{*}{q}\}^T p\,d\Omega \tag{4}$$

ﾍﾟﾄﾛﾌ･ｶﾞﾗｰｷﾝ有限要素補間を以下に示す。

$$\{v\}=[N^v]\{v^e\}\qquad \{\dot{v}\}=[N^v]\{\dot{v}^e\}\qquad p=[N^p]\{p^e\}\qquad \{w\}=[N^w]\{w^e\}$$
$$\{\overset{*}{q}\}=[N^q]\{\overset{*}{q}{}^e\}\qquad \{\tau\}=\{dv\}=[b^v]\{v^e\}\qquad \{dw\}=[b^w]\{\overset{*}{w}{}^e\} \tag{5}$$

したがって、N・S方程式の有限要素形式は以下のようになる。

$$\int_{\Omega}\rho[N^w]^T[N^v]d\Omega\{\dot{v}^e\}+\int_{\Omega}\rho[N^w]^T[D][N^v]d\Omega\{v^e\}-\int_{\Omega}[b^w]^T\{I_2\}[N^p]d\Omega\{p^e\}$$

$$+\int\mu[b^w]T[b^w]d\Omega\{v^e\}=\int_{\Gamma_p}[N^w]^T\{\overline{t}\}d\Gamma+\int_{\Omega}\rho[N^w]^T\{f\}d\Omega \tag{6}$$

または、

$$[m]\{\dot{v}^e\}+[K^{vv}]\{v^e\}-[K^{vp}]\{p^e\}=\{f^e\} \tag{7}$$

ペナルティ方程式の有限要素形式は次のようになる。

$$\int_{\Omega}[N^q]^T\{I_2\}[b^v]d\Omega\{v^e\}=-\varepsilon\int_{\Omega}[N^q]^T[N^p]d\Omega\{p^e\} \tag{8}$$

または、

$$[K^{pv}]\{v^e\}=-\varepsilon[K^{pp}]\{p^e\} \tag{9}$$

よって

$$\{p^e\}=-\frac{1}{\varepsilon}[K^{pp}]^{-1}[K^{pv}]\{v^e\} \tag{10}$$

$$[m]\{\dot{v}^e\}+\left([K^{vv}]-\frac{1}{\varepsilon}[K^{vp}][K^{pp}]^{-1}[K^{pv}]\right)=\{f^e\} \tag{11}$$

または、

$$[m]\{\dot{v}^e\}+[K]\{v^e\}=\{f^e\} \tag{12}$$

２次元アイソパラメトリック四角形要素について考える。速度の補間は以下のようになる。

$$v_1=N_I v_1{}^e{}_i \qquad v_2=N_I v_2{}^e{}_i \tag{13}$$

この状態では、４つの節点での速度のみを用いて要素内部を補間するため、要素内に流れの回転成分が存在する場合に有効ではない。また、流れの場合たいていは乱流現象なので、このままで実問題に対しては正確な解を求めることは難しい。そこで、この要素面に対して垂直な成分（ｚ方向）だけをもつパラメーターを導入する。

このパラメーターをΩとおく。このΩを要素内にフーリエ級数を使って補間すると、

$$\Omega=w\cos\frac{\xi}{2}\pi\cos\frac{\eta}{2}\pi \tag{14}$$

ここで、wは要素中心でのΩの値である。

さて、次にこのΩを以下のようにして速度v_1，v_2に振り分ける。

$$\Omega v_1=\frac{-\eta}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}w\cos\frac{\xi}{2}\pi\cos\frac{\eta}{2}\pi \tag{15}$$

$$\Omega v_2=\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2+\eta^2}}w\cos\frac{\xi}{2}\pi\cos\frac{\eta}{2}\pi \tag{16}$$

wを(15)(16)のように振り分けることによって要素内での速度の回転の成分を考慮することができる。

よって、速度v_1, v_2に対する新たな補間関数は、

$$v_1=N_I v_1{}^e{}_i+\Omega v_1 \qquad v_2=N_I v_2{}^e{}_i+\Omega v_2 \tag{17}$$

未知数は、v_1 (1−4)，v_2 (1−4) に加えて、さらにwが増える。

vに対する要素剛性マトリックスは以下のようになる。

$$\begin{bmatrix} k_{vv} & k_{vw} \\ k_{wv} & k_{ww} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v^e{}_1 \\ v^e{}_2 \\ v^e{}_3 \\ v^e{}_4 \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} f_v \\ f_w \end{bmatrix} \tag{18}$$

上式を次のように書き直す。

$$[k_{vv}]\{v^e{}_i\}+[k_{vw}]\{w\}=\{f_v\} \tag{19}$$

$[k_{wv}]\{v^e{}_i\}+[k_{ww}]\{w\}=\{f_w\}$ （但し、 ｉ＝１～４） (20)

(20)をwについて解くと、

$$\{w\}=[k_{ww}]^{-1}(\{f_w\}-[k_{wv}]\{v^e{}_i\}) \tag{21}$$

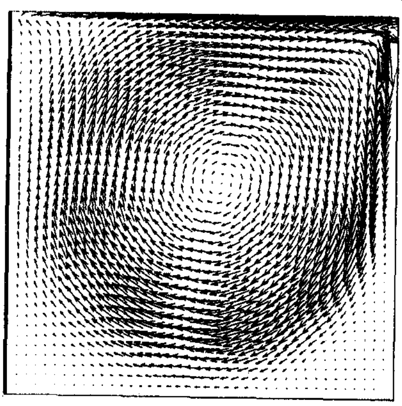
これを(19)に代入してvについて整理すると

$$([k_{vv}]-[k_{vw}][k_{ww}][k_{wv}])\{v^e{}_i\}=\{f_v\}-[k_{vw}]^{-1}\{f_w\} \tag{22}$$

このように、vに対する要素剛性マトリックスの形は変化するが、未知数wは要素内でキャンセルする事になる。

３． 計算結果

計算例として、２次元キャビティフローについて解析した。。両者ともレイノルズ数は１０００でメッシュ分割数は４０×４０の１６００である。低レイノルズ数領域では顕著な回転成分付加による効果は見られない。



計算結果例　Ｒｅ＝１０００

４． 結言

今回は、要素内で回転は１つで１方向成分しか導入しなかったが、今後は２，３，と増やしてみて、本方法の有効性を探っていきたいと考えている。

参考文献

１）鷲津久一郎他編「有限要素法ハンドブック　基礎編」　２）今井　功　著　「流体力学」