II-278　SIMPLEアルゴリズムにおける水位計算法の改良

北海道開発コンサルタント（株）　正員　史　亜傑
北海道開発コンサルタント（株）　正員　荒井　信行
北海道開発コンサルタント（株）　正員　三谷　紀一

１、はじめに

流れの数値計算において、ＳＩＭＰＬＥアルゴリズム[1]はその概念の明快さとプログラム化の簡易さで多用されている。しかし、河川流の場合、複雑な境界形状を有するため、水理量の急激な変化により、しばしば収束解が得られずに計算が途中で発散し、解決に多大な時間と労力を費やすことも少なくない。その原因の一つは、水位計算において、水位の補正値に対して自由水面境界の変化に伴う水深の変化を考慮していないためである。本研究では、このような従来の計算法の問題点を明らかにするとともに、計算の安定性、収束性を高めるため、水位変化に伴う水深の変化を考慮した水位計算法を提案する。

２、従来の水位計算法の問題点

問題を簡単にするため、一次元定常流れを考える。ＳＩＭＰＬＥアルゴリズムでは、まず運動方程式を次式のように離散化し、水位を仮定して流速を計算する。

$$a_P u_i = a_W u_{i-1} + a_E u_{i+1} + S - gh\Delta x \dot{H}_x \qquad (1)$$

ここに、ａは離散化係数、Ｓは河床抵抗項、ｈは水深、Δｘは計算区間、$\dot{H}_x$ は水面勾配である。次に、計算流速が連続条件を満足するように水位を補正する。水位の補正値は次のように求める。

離散化式（１）の係数は$a_W \fallingdotseq uh, a_E \fallingdotseq 0, a_P = a_W + a_E \fallingdotseq uh$ なので、水位の変化δＨによる流速の変化をδｕとすると、流速変化と水位変化の関係として、次式が近似的に成り立つ。

$$\delta u \fallingdotseq -(gh\Delta x/a_P)(\delta \dot{H})_x = -(g\Delta x/u)(\delta \dot{H})_x \qquad (2)$$

一方、水深変化δｈ＝δＨの関係があるので、計算流量Q_c＝ｕｈと実際の流量Q_0の差をδＱとすると、連続式より、次式のような水位補正値δＨに関する一階微分方程式が得られ、それを解いて水位補正値が求められる。

$$-\delta Q = u\delta h + h\delta u = u\delta H - (gh\Delta x/u)(\delta \dot{H})_x \qquad (3)$$

従来の計算法では、上式中の水深変化項ｕδＨを省略してδＨを計算することになるが、以下に示すように、水深変化項の省略により、δＨに無視できない誤差が生じる。

いま、ｈ、ｕが一定である状態を考える。計算領域の長さをＬとし、その領域をＮ等分割して、境界条件として下流端で水位（既知）を与えると、（３）式の解は次のようである。

$$\delta H = -\frac{\delta Q}{u}\left\{1-\exp\left[-N\frac{u^2}{gh}\left(1-\frac{x}{L}\right)\right]\right\} \qquad (4)$$

一方、水深変化項を省略した式の解は次のようになる。

$$\delta H' = -\frac{\delta Q}{u}N\frac{u^2}{gh}\left(1-\frac{x}{L}\right) \qquad (5)$$

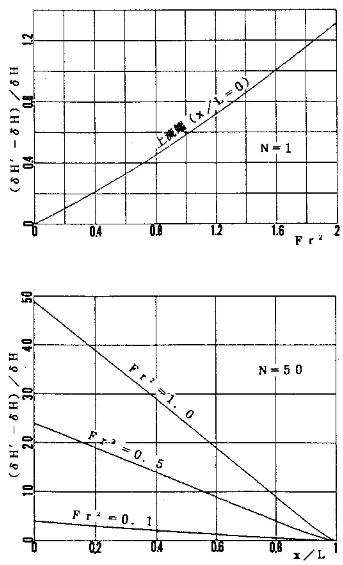

図1　δＨ'の相対誤差

分割区間数Ｎ及びフルード数$Fr^2 = u^2/gh$をパラメータとして、δＨ'の相対誤差を計算すると、図１に示すとおりである。δＨ'の誤差はフルード数及び計算点数に比例して増大し、相対誤差としては１以上のオーダーになることが示されている。この水位補正値の不正確さによって生じる計算の発散を防ぐには、

δ H’を緩和係数で緩和するのが一般的であるが、大幅な緩和によりまた新たな誤差を生み出し、全体的な収束のスピードも低下する。従って、安定かつ効率的に計算を行うためには、水深変化を考慮した計算法が必要である。

３、水深－水位連動の水位補正式

二次元開水路流れの場合、水位変化による流速の変化を$\delta u = -f_u \frac{\partial H}{\partial x}$, $\delta v = -f_v \frac{\partial H}{\partial y}$ とすると、連続式から誘導された水深変化を考慮した水位補正式は次のように表される。

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^*\delta H - h^* f_u \frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(v^*\delta H - h^* f_v \frac{\partial H}{\partial y}\right) = -\left(\frac{\partial u^* h^*}{\partial x} + \frac{\partial v^* h^*}{\partial y}\right) \qquad (6)$$

ここに、* 付きの諸量は計算途中段階の量である。上式はδ Hに関する二階偏微分方程式で、運動方程式と同様な離散化方法で数値的に解ける。水深変化（左辺括弧中の第一項）を考慮したことにより、水位変化に対して水深が連動し、精度の高いδ Hが求められる。

４、計算例

図２は常射流が混在する段落ち流れ[2] の実験例である。図中の実線は静水状態を初期値として定常状態に達するまで非定常計算を行い得られた定常水位の計算値である。本計算法による最初の時間刻み（$t_1 = \Delta t = 0.5$秒）における水位の収束値は図３の実線である。また、その収束値を得るまでΔt内各ステップの水位は図中の破線であり、緩和係数は１（緩和なし）を使用している。比較として、従来の計算法で算出した各ステップの水位を図４に示す。この方法では、δ H’を緩和しなければ計算が途中で発散したため、緩和係数0.4 を使用している。それによると、水深変化を考慮した本計算法がより速く収束値に接近している様子がわかる。なお、ベンチマークテストとして、定常状態に達するまでのＣＰＵ時間を比較して図５に示す。水深変化を考慮したことによって効率的な計算が行われたことがわかる。

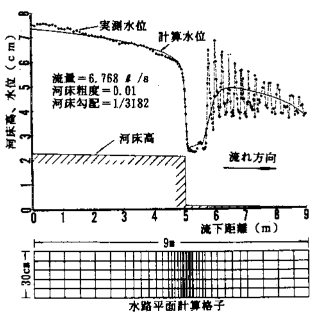

図２　常射流混在の流れ

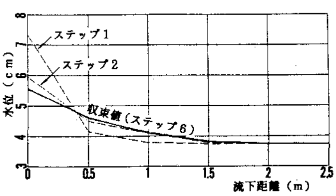

図３　水位の変化（本法）

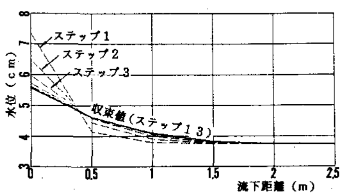

図４　水位の変化（従来法）

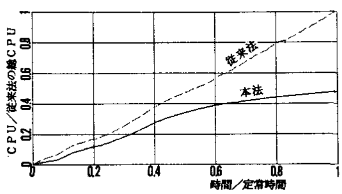

図５　ＣＰＵ時間

５、まとめ

水深変化項を無視した従来の水位計算法における水位補正値の誤差はフルード数及び計算点数に比例して増大することを明らかにした。次に水深－水位連動の水位計算法を提案し、上記の誤差の発生及び増大を抑えることによって境界形状及び水理量が急激に変化する流れに対しても安定で効率的な計算ができることを示した。今後は、本計算法を種々の流れの数値計算に適用し、活用を図って行きたいと考えている。

最後に、本研究を進めるにあたり貴重なご助言とご討議を頂いた北海道開発局開発土木研究所河川研究室ならびに実験資料を提供して頂いた北海道大学工学部河川工学研究室に謝意を表します。

参考文献：(1)Suhas V. Patankar: Numerical Heat Transfer and Fluid Flow. Hemisphere Publishing Corparation. 1980.

(2)森平宏治：段落ち部の流れの研究、北海道大学河川工学講座卒業論文、平成２年３月