

II-277

確率有限要素法による水面波動問題の解析

中央大学

学生員 櫻庭雅明

中央大学

正 員 檜山和男

1. はじめに

水面波動問題を解析するために、これまで多くの数値計算が提案されているが、そのほとんどは入力データ(境界条件、入射波条件、水深など)は一定であるものと仮定され解析が行われてきた。しかし、これらの入力データは通常一定に定まるものではなく不確定性を有している。従って、入力データの不確定性に起因する変動量を知ることは重要であると考えられる。本研究では水面波動問題において水深(波数)を不確定量と仮定し、振幅関数の不確定変動量を、1次摂動法に基づく確率有限要素法により解析を行うことを検討する。なお、例題としては解析解の存在する長方形湾の湾水振動問題を取り上げた。

2. 有限要素方程式

表面波の基礎方程式として、水深一定を仮定したヘルムホルツ方程式を用いる。

$$\nabla^2 \eta + k^2 \eta = 0 \quad (1)$$

ただし、 η は2次元の振幅分布関数、 k は波数を表す。(1)式に有限要素法を適用し、3角形1次要素を用いて離散化を行うと次のような有限要素方程式が得られる。

$$[K] \{\eta\} = \{F\} \quad (2)$$

ただし、 $[K]$ は剛性マトリックス、 $\{F\}$ は荷重ベクトルである。また、境界条件としては次式が導入される。

$$\eta, n = 0 \quad \text{on } S_1 \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \eta_{sc}}{\partial r} - i k \eta_{sc} \right) = 0 \quad \text{on } S_2 \quad (4)$$

ただし、 n は境界に対する法線方向微分を表し、 r は散乱源からの距離、 S_1 は陸岸境界、 S_2 は開境界を示す。

3. 1次摂動法に基づく確率有限要素解析

本解析では、平面内で空間的に波数のみが無相関に不確定変動するものと仮定する。波数 k は平均値 $\bar{k}$ と期待値が0である微小確率変数 α を用いて表されるものとする。

$$k(x, y) = \bar{k} \{1 + \alpha(x, y)\} \quad (5)$$

(5)式より、剛性行列 $[K]$ は確率変数の関数として表され、(2)式の剛性行列 $[K]$ 、荷重ベクトル $\{F\}$ は次のようなテーラー級数展開を施し、確定解、1次変動率を逐次求める1次摂動法を適用すると振幅分布関数は次式で表される。

$$\{\bar{\eta}\} = [\bar{K}]^{-1} \{F\} \quad (6)$$

$$\{\eta_k^I\} = -[\bar{K}]^{-1} [K_k^I] \{\bar{\eta}\} \quad (7)$$

(6)式は振幅分布関数の確定解、(7)式は1次変動率であることを示す。また、任意の場所における振幅分布関数の1次摂動法による近似式(6),(7)式は次のような形としてまとめられる。

$$\eta = \bar{\eta} + \sum_{j=1}^n \eta_j^I \alpha_j \quad (8)$$

このときの振幅分布関数の平均値と分散は、1次近似法により次のように評価される。

$$E[\eta] = \bar{\eta} \quad (9)$$

$$Var[\eta] = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \eta_i^l \eta_j^l E[\alpha_i \alpha_j] \quad (10)$$

ただし $E[\alpha_i \alpha_j]$ は、確率変数 α_i, α_j の共分散で、解析においては自己相関関数として考えるものとする。

4. 数値解析例

数値解析例として、図1に示す長方形港湾を考える。有限要素分割は図2に示し、要素数は442、節点数は257である。計算条件として入射波は図のように湾に直角に入射するものとし、壁面では完全反射の条件を用いた。解析結果として、図1のP点での振幅関数の統計量を求め、図3に1次摂動法に基づいて求められた振幅関数の3 σ 限界を表し、解析解の変動を示した。この結果から $kl=1.35, 4.2$ の長方形湾の固有周期付近での変動が少し大きくなり、振幅増加率が大きくなると変動が大きくなるが全体的に変動は微小であることが分かった。

5. おわりに

本報告において、1次摂動法に基づく確率有限要素法を水面波動解析に適用することの検討を行った。ここでは本研究の第一歩として波数 k が不確定変動するものと仮定して、長方形港湾の湾水振動問題における解析を行った。今後は境界条件や入射波条件の不確定性を考慮にいたれた解析を行う予定である。

参考文献:

- [1] 中桐滋, 久田俊明, 確率有限要素法入門, 培風館出版
- [2] 桜庭雅明, 檜山和男, 第19回関東支部技術研究発表回講演概要集, pp.100-101(1992)
- [3] Chen, H.S. and Mei, C.C., Persons Lab., MIT, Report No.190, 1977.

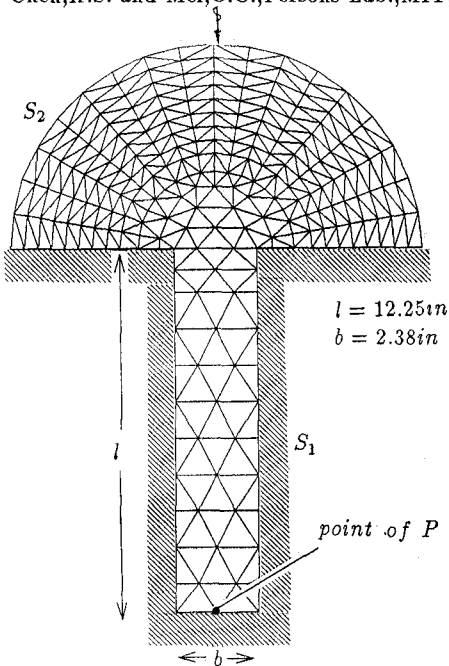


図1 有限要素分割図

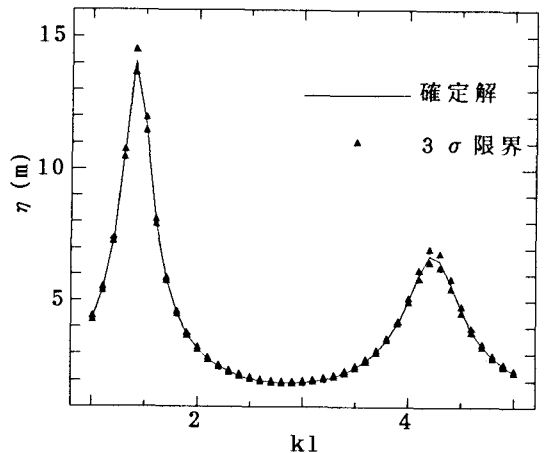


図2 波数変動を与えた周波数応答曲線