II-276　重み付差分法による潮流解析

九州産業大学　正員　加納正道
九州産業大学　正員　赤坂順三
東和大学　正員　空閑幸雄

1．まえがき　これまでに、我々の提唱した重み付差分法で移流拡散方程式や浸透流方程式を精度よく解析することができた。さらに、前報[1)]においては重み付差分法で潮流解析を行うことを考え、その定式化および重みの定め方について述べた。そこで本報では、Ｎａｖｉｅｒ－Ｓｔｏｋｏｓ方程式の非線形性と同様の性質を持ち、乱流・衝撃波の問題の原型方程式と見なされているＢｕｒｇｅｒ'ｓ方程式で、重み付差分法の精度を検証したので、その一部を示す。

2．基礎方程式　基礎方程式として三次元のレイノルズ方程式を海底から水面まで積分して鉛直方向の平均値として表示した二次元の運動方程式［式（１）にｘ方向のみ示す］および連続の式（２）を基礎式とする。

$$\frac{\partial M}{\partial t}+\frac{M}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{N}{h+\zeta}\frac{\partial M}{\partial y}=-g\,(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN+\varepsilon\left(\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right) \quad (1)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}=0 \quad (2)\qquad,\qquad \frac{M}{h+\zeta}=m\ ,\ \frac{N}{h+\zeta}=n \quad (3)$$

ここに、Ｍ＝Ｕ（ｈ＋ζ），Ｎ＝Ｖ（ｈ＋ζ）はおのおのｘ，ｙ方向の線流量、Ｕ，Ｖはそれぞれｘ，ｙ方向の平均流速、ζは水面の平均水面からの高さ、W_x, W_y はｘ，ｙ方向の風速成分、ｇは重力の加速度、ｆはコリオリの係数、εは水平方向の渦動粘性係数、ρ_a, ρ_w は空気および水の密度、δ＝１～１．５の補正係数、γ_b, γ_s は水底、水面における摩擦係数である。また、流速ベクトル $\mathbf{V}=\sqrt{U^2+V^2}$ とする。

3．重み付差分法の定め方と精度　差分モデルが前報等[1)2)]とは異なっているが、定式化および重みの定め方は同様にしてできるので、ここでは簡単に述べておく。まず、二次元運動方程式（１）を解析するための重み付差分法を求めるため、いま基礎式（１）において式（３）、（４）のように表わし、F_Lを非同次項とみなして式（１）を式（５）と書き直す。式（５）において非同次項Ｆをゼロとおいた式（６）は２次元Ｂｕｒｇｅｒ'ｓ方程式（同次方程式）である。そこで、Ｆ＝０とおいた同次形の式を満たす重み付差分法を次の様にして求める。即ち、同次形の式を満たすｘ，ｙ，ｔの多項式は式（７）で表わされる。いま、同次形の式において原点を任意の点に移し、差分格子間隔を、$\Delta x=h$、$\Delta y=h$、$\Delta t=k=R\cdot h^2$とし、原点のごく近くを考えて、ｘ，ｙ，ｔを離散化して$x=p_1h$、$y=p_2h$、$t=qRh^2$と表わす、ここに、p_1, p_2, qは0, ±1, ±2 のような大きくない整数。ここで、図１の近接点４個を用い、

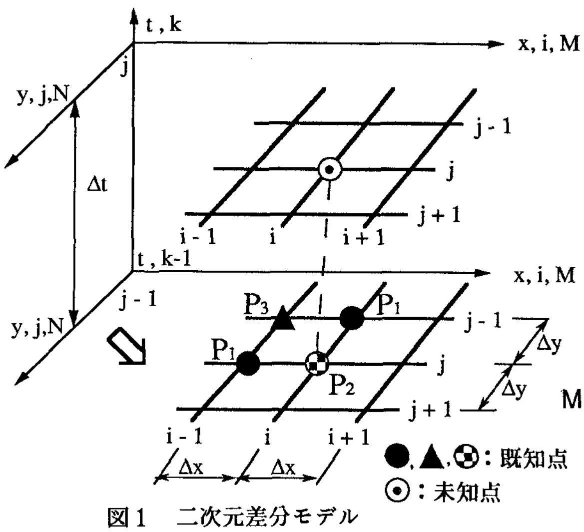

図１　二次元差分モデル

$$-g\,(h+\zeta)\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\delta\frac{\rho_a}{\rho_w}\gamma_s^2 W_x\sqrt{W_x^2+W_y^2}-\frac{\gamma_b^2}{(h+\zeta)^2}M\sqrt{M^2+N^2}+fN=F_L \quad (4)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=F_L \quad (5)$$

$$\frac{\partial M}{\partial t}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial x^2}-\varepsilon\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}+m\frac{\partial M}{\partial x}+n\frac{\partial M}{\partial y}=0 \quad (6)$$

$$M^r(x,y,t)=\sum_{i=0}^{r/2}\left\{\frac{(x-mt+y-nt)^{r-2i}}{r-2i}\cdot\frac{(2\varepsilon t)^i}{i!}\right\} \quad (7)$$

$$M(i,j,k)=P_1\cdot\{M(i-1,j,k-1)+M(i,j-1,k-1)\}+P_2\cdot M(i,j,k-1)+P_3\cdot M(i-1,j-1,k-1) \quad (8)$$

この４個３種類の重みを定めるために式（７）において、ｒ＝０，１，２とおいて得られるMの値を重み付差分式（８）に代入すれば連立方程式（９）が得られ、これを解けば重みP_1，P_2，P_3の値が定まる。次に、厳密解のわかっている非線形モデルの計算を行い、重み付差分法の適用性について検討する。いま、渦動粘性係数がなく下流へ伝わる理想化された衝撃波を考えればその厳密解は波速1/2で下流へ伝播する不連続波で示され式（１０）を得る。図2、３には計算条件を$\Delta x=\Delta y=0.01$, $\Delta t=0.005$, $s_0=0.02$,とした、重み付差分解と厳密解を３次元表示したものを示す。これらの図より重み付差分解は解の振動はみられずまた厳密解とよく一致し、我々の提案した重み付差分法の妥当性が得られた。

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2(-1+F_*) & F_* & (-2+F_*) \\ 2\{(-1+F_*)^2/2! - 2\mu\} & F_*^2/2! - 2\mu & (-2+F_*)^2/2! - 2\mu \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

$$M=\begin{cases} 1: & \{(x+y-s_0)/t \le 1/2\} \\ 0: & \{(x+y-s_0)/t > 1/2\} \end{cases} \tag{10}$$

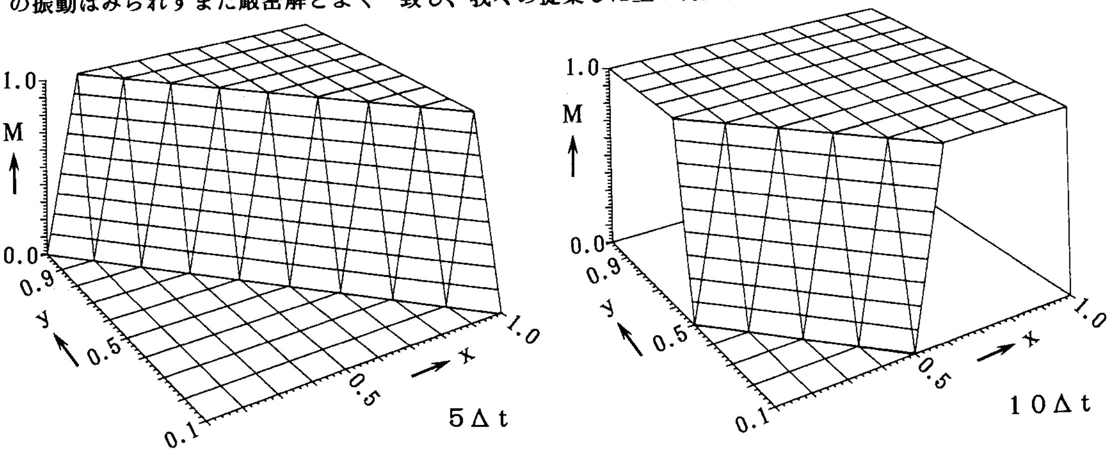

図２　重み付差分法解

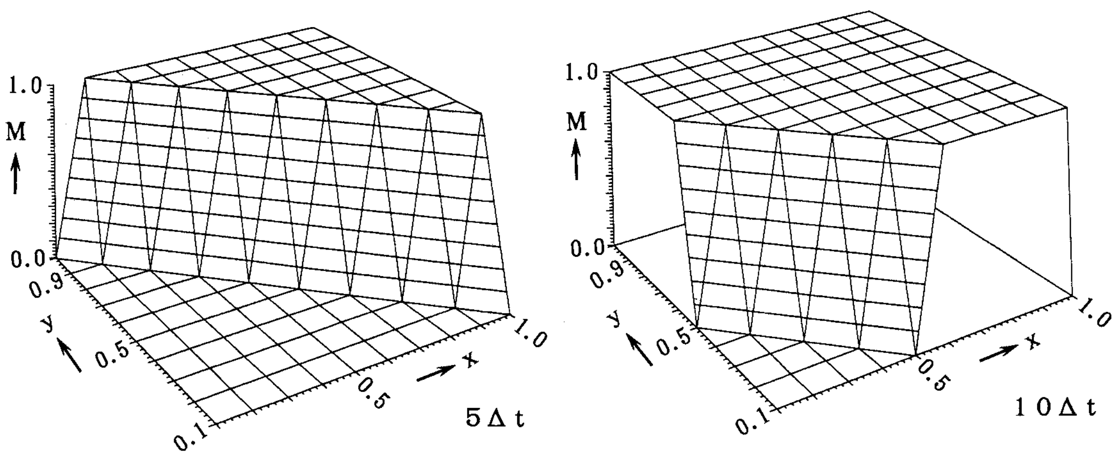

図３　厳密解

４．あとがき　今回一つの差分モデルについて精度検証を行ったが、今後幾種類かの差分モデルについても同様に精度検証を行い、さらには、実際の湾内の潮流解析への適用を考えている。

参考文献

１）加納・赤坂・空閑：重み付差分法の潮流解析への応用、第４６回年次学術講演会Ⅱ部
２）加納・赤坂・空閑：任意形状をもつ重み付差分法による今津湾潮流解析、平成３年度西部支部年講