II-274 有限要素法による浅水長波方程式の解析における水理定数の同定

中央大学　学生員　合田雷太
佐藤工業　正　員　児玉敏雄
中央大学　正　員　川原睦人

1. はじめに

潮流の解析を行う場合、浅水長波方程式の運動方程式には、一般に、エネルギーの減衰項として海底摩擦項と粘性項が含まれ、流れの挙動に対して少なからず影響を与える項となっている。海底摩擦項は、流速の２乗のオーダーに比例し粘性項は平均流速の２階微分から成っているため、卓越する場所は空間的、時間的に異なる。したがって、着目している解析領域内で流れの挙動を詳細に記述するためには、これらの物理定数を領域内部で的確に決定する必要がある。本報告では、海底摩擦係数と渦動粘性係数を同時に同定する方法を提案する。この手法は、評価関数として観測水位と計算水位の残差平方和を設定し、評価関数の最小化を行うことによりパラメターを同定する手法である。ここでは、同定の計算手順および検証のために行った数値解析例を示す。

2. 支配方程式

支配方程式として、以下に示す浅水長波方程式を用いる。

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_j u_{i,j}+g\eta_{,i}+\nu_e(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}+\frac{\beta}{h}(u_k u_k)^{\frac{1}{2}}u_i=0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t}+\{(h+\eta)u_i\}_{,i}=0 \tag{2}$$

ここで、u_i, η は平均流速成分、水位上昇量を表し、g, h は重力加速度および水深を意味する。また，ν_eは渦動粘性係数を βは海底摩擦係数を表す。空間，時間方向に対しては２段階陽的解法[1]を適用する.

3. パラメターの同定方法

渦動粘性係数、海底摩擦係数を未知のパラメターとして、以下のように表すこととする。

$$\begin{aligned} P_i^T &= \{\nu_e\ ,\ \beta\} \\ \nu_e^T &= \{\nu_e^1,\nu_e^2,\nu_e^3,\cdots,\nu_e^n\} \\ \beta^T &= \{\beta^1,\beta^2,\beta^3,\cdots,\beta^n\} \end{aligned} \tag{3}$$

解析領域をいくつかの領域に区分し，その内部ではν_e,βは一定であるものとする。評価関数として水位の観測結果と計算結果の残差平方和を以下のように用いる。

$$J(P_i)=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}\{\tilde{\eta}_\mu(t)-\eta_\mu(P_i,t)\}^T\{\tilde{\eta}_\mu(t)-\eta_\mu(P_i,t)\}dt \tag{4}$$

ここで、$\tilde{\eta}_\mu(t)$ は観測点 μ において得られる水位上昇量を表し、$\eta_\mu(P_i,t)$ はそれに対応する水位の計算値である。この評価関数の最小化には共役勾配法の一種である Fletcher Reeves 法[2]を適用する。探索方向 d_i は, それぞれ渦動粘性係数、海底摩擦係数に対応し、以下のように表す。

$$d_i^T = \{d_\alpha\ ,\ d_\beta\}$$

次に各部分領域におけるパラメターの感度行列を以下の感度方程式により求める。
まず渦動粘性係数については、

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{u}_{\beta i}}{\partial \nu_e}+K_{\alpha\beta\gamma j}(\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \nu_e}u_{\gamma i}+u_{\beta j}\frac{\partial u_{\gamma i}}{\partial \nu_e}) \\ +H_{\alpha\beta i}\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \nu_e}+S_{\alpha i\beta j}\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \nu_e} \\ +\frac{\partial S_{\alpha i\beta j}}{\partial \nu_e}u_{\beta j}+I_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma^b_{\beta j}}{\partial \nu_e}=0 \end{aligned} \tag{5}$$

$$M_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{\eta}_\beta}{\partial \nu_e}+A_{\alpha\beta i\gamma}(\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \nu_e}\eta_\gamma+u_{\beta i}\frac{\partial \eta_\gamma}{\partial \nu_e})+B_{\alpha\beta i}\frac{\partial u_{\beta i}}{\partial \nu_e}=0 \tag{6}$$

また、海底摩擦係数については

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{u}_{\beta i}}{\partial \beta}+K_{\alpha\beta\gamma j}(\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \beta}u_{\gamma i}+u_{\beta j}\frac{\partial u_{\gamma i}}{\partial \beta}) \\ +H_{\alpha\beta i}\frac{\partial \eta_\beta}{\partial \beta}+S_{\alpha i\beta j}\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \beta} \\ +I_{\alpha\beta}\frac{\partial \gamma^b_{\beta i}}{\partial \beta}+\frac{\partial I_{\alpha\beta}}{\partial \beta}\gamma^b_{\beta i}=0 \end{aligned} \tag{7}$$

$$M_{\alpha\beta}\frac{\partial \dot{\eta}_\beta}{\partial \beta}+A_{\alpha\beta i\gamma}(\frac{\partial u_{\beta j}}{\partial \beta}\eta_\gamma+u_{\beta i}\frac{\partial \eta_\gamma}{\partial \beta})+B_{\alpha\beta i}\frac{\partial u_{\beta i}}{\partial \beta}=0 \tag{8}$$

これらの方程式に対しても同様に２段階陽解法を用いて解くことにより、感度行列を求めることができる。また、ステップ幅αは、評価関数 $J(P_i+\alpha\cdot d_i)$ をテイラー展開し、ステップ幅αで、微分したものを零と置くことにより、求める。

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = -\int_{t_0}^{t_f} \{\frac{\partial \eta_\mu}{\partial \nu_e} d_\alpha + \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \beta} d_\beta\}^T \{\tilde{\eta_\mu} - \eta_\mu(P_i, t)\} dt$$
$$+\alpha \int_{t_0}^{t_f} \{\frac{\partial \eta_\mu}{\partial \nu_e} d_\alpha + \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \beta} d_\beta\}^T \{\frac{\partial \eta_\mu}{\partial \nu_e} d_\alpha + \frac{\partial \eta_\mu}{\partial \beta} d_\beta\} dt = 0 \quad (9)$$

探索方向 d を決定する際に用いられる勾配は、以下のように表す。

$$G_\beta^k = \frac{\partial J(P_i^{k+1})/\partial P \cdot \partial J(P_i^{k+1})/\partial P}{\partial J(P_i^k)/\partial P \cdot \partial J(P_i^k)/\partial P} \qquad (10)$$

以上の手順によりを用いて評価関数の最小化を行い、パラメターを同定する。

4. 数値計算例

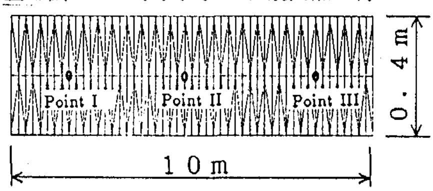
数値計算例として、全長 10m 、水路幅 0.4m の一次元水路モデルを用い, 波動の伝播解析を行う。水路の有限要素分割を図－1 に示す。水深は 10m で一定とする。流入条件は、振幅 1m 周期 1 秒の正弦波を与え、出口では進行波の条件により透過条件を与えることとする。図－2 に示すように、解析領域を３つの部分領域に分割し、各領域に異なる渦動粘性係数、海底摩擦係数を与えこの条件により順解析を行った。順解析によって得られた観測点の水位時刻歴を図－3 に示す。次に、観測点で得られた水位の時刻歴を観測値として逆解析を行った。但し、初期値は、渦動粘性係数に対しては $0.1(m^2/s)$ 、海底摩擦係数に対しては 1.0 と与えた。渦動粘性係数と海底摩擦係数の同定結果を図－4 、図－5 に示す。この図より各領域の係数は約２８回の繰り返し計算で正しい値に収束していることがわかる。

5. おわりに

浅水長波方程式における渦動粘性係数と海底摩擦係数の両方を同時に同定する手法を示した。これらのパラメターの同定について一次元の水路モデルでの検証を行った。本手法を実際問題へ応用することにより、より精度の高い潮流解析を行うことが可能であると考えられる。

参考文献

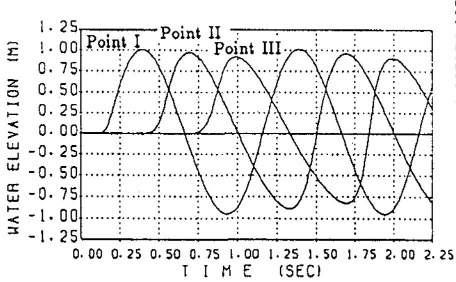
1. M. Kawahara, H. Hirano, K. Tubota and K. Inagaki ; Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow , J. Numer. Meth . Enging.,2, pp. 89-112(1982)
2. 合田, 児玉, 川原," 有限要素法による潮流解析における渦動粘性係数の同定", 第４６回土木学会年次講演回第 II 部門, １９９１.



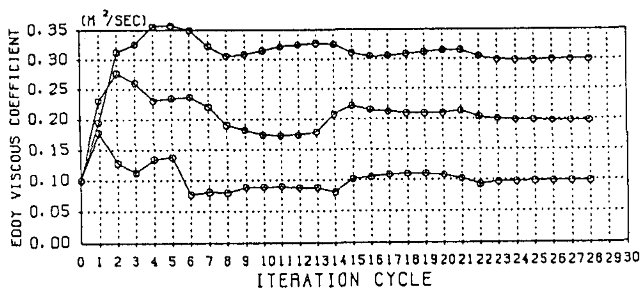
図－1　有限要素分割図

$\nu_e = 0.1$	$\nu_e = 0.2$	$\nu_e = 0.3$
$\beta = 1.0$	$\beta = 2.0$	$\beta = 3.0$

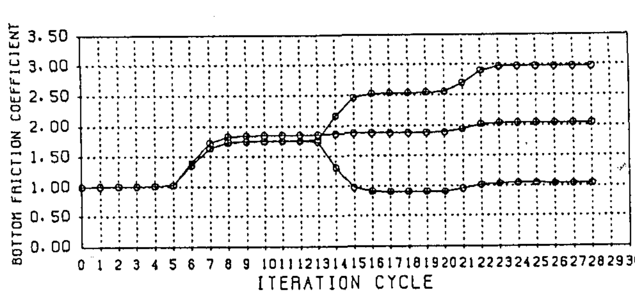
図－2　パラメターの分割図



図－3　観測水位図



図－4　渦動粘性係数の収束状況



図－5　海底摩擦係数の収束状況