# II-259　測定値のばらつきを考慮した確率論的地下水解析手法の提案

(財)電力中央研究所　正会員　○田中靖治
清水建設(株)　正会員　奥野哲夫
同　上　正会員　鈴木　誠
同　上　正会員　楠本　太

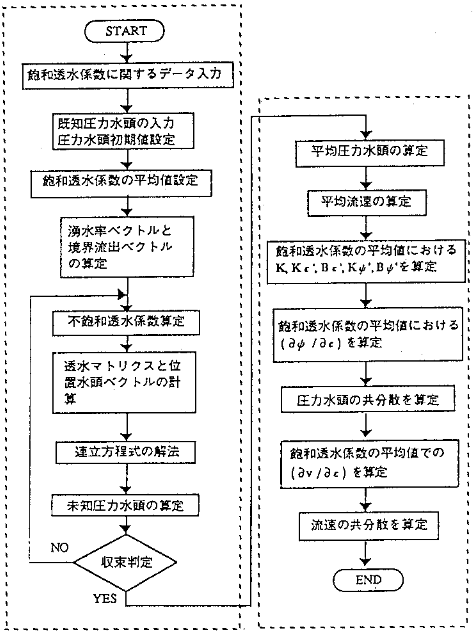
## １．はじめに

近年、地下構造物の建設に伴い多数の地下水調査が実施されてきている。しかし、原位置で測定された透水係数の値は、同一と考えられる土層内でも場所により異なった値となるにもかかわらず、従来は平均値や安全側となるような値で解析が行われてきた。ここでは、透水係数の測定値を有効に利用するため、透水係数の空間分布を推定し、その推定値と推定誤差を入力データとして確率論的に地下水解析を行う手法を提案した。

## ２．透水係数の空間分布の推定

透水試験により、対象としている地盤内のＮ個の点で透水係数ｋが測定されているとき、この空間分布を推定する。推定手法は地盤統計学でブロック・クリギングとよばれる手法を用い、各要素の透水係数の推定値および推定誤差を求める[1]。クリギングは推定値を測定値の線形和で表現し、その重み係数は推定量の不偏性と推定誤差分散を最小にするという条件で決定する。

任意の点ｘにおける透水係数ｋ(ｘ)はマクロ的にみた場合の傾向変動であるトレンド成分ｍ(ｘ)とランダム成分Ｗ(ｘ)に分けられるものとし、統計処理によりトレンド成分やランダム成分の平均値、分散および自己相関係数を求める。次に、任意の要素Ｖの推定量$k^*_v$を測定値$k(x_i)$の次式に示す線形結合で表現する。




従来の(確定論的)飽和・不飽和浸透流解析
(飽和透水係数の平均値を使用して
圧力水頭の推定値(平均値)を算定)

圧力水頭と流速の
推定誤差(分散)の解析

図－１　解析のフロー

$$k^*_v = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i k(x_i) \qquad (1)$$

ここで、$\lambda_i$は重み係数であり、$x_i$は測定値を示す。これらの重み係数を以下の条件により求める。

・不偏推定量

$$E[k^*_v] = E[k_v] \quad \rightarrow \quad \Sigma \lambda_i = 1 \qquad (2)$$

・最小推定誤差分散

$$E[\{k_v - k^*_v\}^2] = \mathrm{Var}\{V\} - 2\{\lambda\}^T\{M_v\} + \{\lambda\}^T[S]\{\lambda\} \quad \rightarrow \quad \min \qquad (3)$$

ここで、Var{Ｖ}は要素Ｖの局所平均をとった分散であり、$\{M_v\}$、[Ｓ]はランダム成分の共分散関数を用いて次のように表現されるベクトルとマトリックスである。

$$\{M_v\} = \begin{Bmatrix} \mathrm{Cov}\{V, W(x_1)\} \\ \text{-----} \\ \mathrm{Cov}\{V, W(x_N)\} \end{Bmatrix}, \quad [S] = \begin{bmatrix} \mathrm{Var}\{W(x_1)\}, & \text{-------}, & \mathrm{Cov}\{W(x_1), W(x_N)\} \\ \text{-------} & \text{-------} & \text{-------} \\ \mathrm{Cov}\{W(x_N), W(x_1)\}, & \text{-------}, & \mathrm{Var}\{W(x_N)\} \end{bmatrix},$$

これらの条件より、ラグランジェの未定係数法により重み係数を求め、式(1)、(3)に代入し、各要素の透水係数の推定値と推定誤差分散を決定する。

## ３．確率論的な飽和・不飽和浸透流解析

近年、線形一次近似を用いた確率論的な飽和・不飽和浸透流解析が行われはじめている[2]。ここでは、特

に空間的相関特性を扱うことができる浸透流解析の確率有限要素法について説明する。

飽和・不飽和浸透流において定常状態の支配方程式を有限要素法を用いて定式化すると次式となる。

$$K(\Psi)\cdot\Psi+B(\Psi)-Q+q=0 \qquad (4)$$

ここに、$\Psi$は圧力水頭ベクトルであり、$K(\Psi)$、$B(\Psi)$、$Q$、$q$はそれぞれ透水係数マトリクス、位置水頭ベクトル、湧水率ベクトル、境界流出率ベクトルである。

今、解析モデルを構成する有限要素の個数をmとし、各要素が１つの不確定要因を含むものとし、次の確率ベクトル$\varepsilon$を考える。

$$\varepsilon=\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots\varepsilon_i,\cdots\varepsilon_m\}$$

ここで、$\varepsilon_i$はｉ番目の要素で定義されるものとする。

透水テンソル$K_{ij}(\Psi)$は各要素内で次式で表されるものとする。

$$K_{ij}(\Psi)=\gamma^e K_{ij}{}^s K^r(\Psi) \qquad (5)$$

ただし、$\gamma^e$は要素ｅの確率変数$\varepsilon_e$の関数、$K_{ij}{}^s$は要素ｅの飽和透水テンソル、$K^r(\Psi)$は圧力水頭に依存する透水係数比である。

式(4)においてＫとＢが確率ベクトル$\varepsilon$の関数と考えると、圧力水頭$\Psi$も確率ベクトル$\varepsilon$の関数となる。圧力水頭$\Psi$を平均値$\bar{\varepsilon}$の近傍でテーラー展開し、その２次以上の高次項を無視すれば、圧力水頭$\Psi_i$の平均値と共分散は以下のように表される。

$$E[\Psi_i]\approx\Psi_i(\bar{\varepsilon}) \qquad (6)$$

$$\mathrm{Cov}[\Psi_i\Psi_j]=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial\varepsilon_k}\right)_{\langle\overline{\varepsilon_k}\rangle}\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial\Psi_j}{\partial\varepsilon_l}\right)_{\langle\overline{\varepsilon_l}\rangle}\cdot\mathrm{Cov}[\varepsilon_k\varepsilon_l] \qquad (7)$$

同様に、式(4)においてＫとＢが確率ベクトル$\varepsilon$の関数と考えると、流速ｖも確率ベクトル$\varepsilon$の関数となる。流速ｖを平均値$\bar{\varepsilon}$の近傍でテーラー展開し、その２次以上の高次項を無視すれば、流速$v_i$の平均値と共分散は以下のように表される。

$$E[v_{pi}]\approx v_{pi}(\bar{\varepsilon}) \qquad (8)$$

$$\mathrm{Cov}[v_{pi}v_{qj}]=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial v_{pi}}{\partial\varepsilon_k}\right)_{\langle\overline{\varepsilon_k}\rangle}\cdot\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{\partial v_{qj}}{\partial\varepsilon_l}\right)_{\langle\overline{\varepsilon_l}\rangle}\cdot\mathrm{Cov}[\varepsilon_k\varepsilon_l] \qquad (9)$$

ここで、添字p,qは流速の成分を表す。

今回提案した解析コードにおいては図－１のフロー図に従って、圧力水頭、流速の推定値（平均値）および推定誤差（共分散）を求めることになる。

なお、式(4)の両辺を$\varepsilon_k$で偏微分し、多少の変形を施し、$\varepsilon$に関する偏微分の項で整理すると次式となる。

$$\frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon}=-\left[K+K'_\Psi\cdot\Psi+B'_\Psi\right]^{-1}\cdot\left[K'_\varepsilon\cdot B'_\varepsilon\right] \qquad (10)$$

ただし$K'_\varepsilon$, $B'_\varepsilon$は確率ベクトル$\varepsilon$の変動による透水マトリクスと位置水頭ベクトルの変化率を、$K'_\Psi$, $B'_\Psi$は確率ベクトル$\varepsilon$の変動に伴って生ずる圧力水頭の変動に起因する透水マトリクスと位置水頭ベクトルの変化率を示している。

平均値$\bar{\varepsilon}$におけるＫ、$K'_\Psi$、$B'_\Psi$、$K'_\varepsilon$ 、$B'_\varepsilon$の値を式(10)に代入することにより、平均値$\bar{\varepsilon}$における偏微分（$\partial\Psi/\partial\varepsilon$）$\langle\bar{\varepsilon}\rangle$を求めることができ、式(7)より圧力水頭の推定誤差が求まる。流速の推定誤差についても同様である。

また、式(7)および(9)中の$\mathrm{Cov}[\varepsilon_k\varepsilon_l]$は２．のブロック・クリッギングにより既に求まっている。

## 4．おわりに

確率論的な浸透流解析のため、空間分布推定法であるブロック・クリッギングと線形一次近似法を組み込んだ確率有限要素法を提案した。今後は、様々なケーススタディ計算を実施し、本解析手法の適用性について検討していきたい。

＜参考文献＞1) Marsily,G. : Quantitative Hydrogeology,Academic Press,1986.

2) 西脇芳文、梨本裕、松井幹雄、相木克介：地下水挙動の確率論的な予測解析、土木学会第45回年次学術講演概要集、第３部、pp.922～923、1990.