

II-78

長方形断面開水路における流速・せん断応力分布

山梨大学工学部 正員 宮沢直季

正員 荻原能男

1. はじめに

開水路における境界せん断応力分布は水路の断面形状, 粗度に大きく左右される。Kruger and Bollrich¹⁾は, 一様な粗度の場合, 平均河床せん断応力の測定値と層流理論によって得られた結果とが良好に一致すると述べている。本研究は, 長方形断面開水路の等流・層流の流速・せん断応力分布を解析的に算出し, 流速・せん断応力分布がどのように水路断面形状アスペクト比 H/B に依存するかを調べることを目的とする。

2. 基礎方程式

図-1のような長方形断面開水路の等流・層流を仮定すると, 流れの基礎方程式は次式のようにポアソン方程式で表される^{2, 3)}。

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = -\rho g \sin \theta, \quad \tau_{yx} = \mu \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \tau_{zx} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1)$$

ここで, τ_{yx} , τ_{zx} : それぞれ y 面, z 面に作用するせん断応力, ρ : 流体密度, g : 重力加速度, $\sin \theta$: 水路床勾配, μ : 粘性係数, u : x 方向の流速である。また, 境界条件は次式のように表される。

$$u(z=0) = u(y=B/2) = \tau_{zx}(z=H) = \tau_{yx}(y=0) = 0 \quad (2)$$

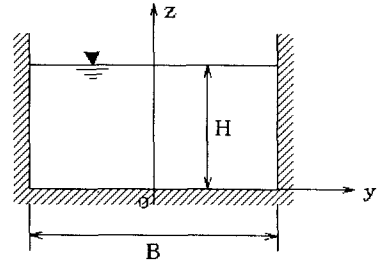


図-1 長方形断面開水路

ここで, B : 水路幅, H : 水深である。式(1)の基礎方程式を式(2)の境界条件のもとで解いて流速 u とせん断応力 τ_{yx} , τ_{zx} を算出する。

3. 流速分布

流速分布 $u(y, z)$ は次式のように表される。

$$u(y, z) = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left\{ \frac{1}{8} (B^2 - 4y^2) + \frac{4B^2}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^3} \frac{\cosh(2k-1)\pi(H-z)/B}{\cosh(2k-1)\pi H/B} \cos(2k-1)\pi \frac{y}{B} \right\} \quad (3)$$

また, 式(3)から平均流速 u_m を求めると, u_m は次式のように表される。

$$u_m = \frac{\rho g \sin \theta}{\mu} \left\{ \frac{B^2}{12} - \frac{8B^3}{\pi^5 H} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh(2k-1)\pi H/B}{(2k-1)^5} \right\} \quad (4)$$

図-2はアスペクト比 $H/B=0.2, 1.0, 5.0$ の場合の平均流速 u_m で無次元した流速 u の分布を示したものである。流速最大の位置は自由水面中央であることはもちろんであるが, 平均流速と同じ値を示す流速の位置に着目すると, その位置はアスペクト比 H/B が大きくなるにつれてより中央に, より河床へ近づくことが示される。

4. せん断応力分布

せん断応力 $\tau_{yx}(y, z)$, $\tau_{zx}(y, z)$ は次式のように表される。

$$\tau_{yx}(y, z) = -\rho g \sin \theta \left\{ y + \frac{4B}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \frac{\cosh(2k-1)\pi(H-z)/B}{\cosh(2k-1)\pi H/B} \sin(2k-1)\pi \frac{y}{B} \right\} \quad (5)$$

$$\tau_{zx}(y, z) = -\frac{4\rho g \sin \theta B}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2} \frac{\sinh(2k-1)\pi(H-z)/B}{\cosh(2k-1)\pi H/B} \cos(2k-1)\pi \frac{y}{B} \quad (6)$$

図-3はアスペクト比 $H/B=1.0$ の場合の壁面せん断応力 $\tau_0 (= \rho g R \sin \theta, R$: 径深)で無次元化したせん断応力 τ_{yz} の分布を示したものである。せん断応力の最大値は側壁の自由水面の位置で起こる。アスペクト比が大きい場合, τ_{yx} は水路上部で等間隔な分布となり, アスペクト比が小さい場合水路中央でほとんど0になることが示される。同様に, 図-4はアスペクト比 $H/B=1.0$ の場合の壁面せん断応力 τ_0 で無次元化したせん断応力 τ_{zx} の分布を示したものである。せん断応力の最大値は水路中央河床面で生じる。アスペク

ト比が大きくなると水路上部への影響は小さく、河床面付近でのせん断力の変化が著しいことが示される。図-5は壁面せん断応力 τ_0 で無次元化した合成せん断応力 $\tau(=\sqrt{\tau_{yx}^2+\tau_{zx}^2})$ の分布を示したものである。せん断応力の最大値は τ_{yx} 、 τ_{zx} の場合と同じく、側壁の自由水面と水路中央河床面で生じ、水路中央水面と河床隅角部で0になる。

5. おわりに

長方形断面開水路における層流流速・せん断応力分布の解析解を得ることができた。また、アスペクト比 H/B 、断面形状による流速・せん断応力分布の依存性を示すことができた。本研究の遂行にあたり、多大な援助を頂いた大橋則和氏（現静岡県庁）に謝意を表します。

参考文献 1) Kruger, F. and Bollrich G., Prepr. Proc. 23rd Congr. IAHR, B-91-B-98, 1989 2) Tsanis, I.K. and Leutheusser, H.J., J. Hydraul. Res, Vol.25, No.3, 193-206, 1986 3) Tsanis, I.K. and Leutheusser, H.J., J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol.108, No.EM2, 386-398, 1982 4) Kartha, V.C. and Leutheusser, H.J., J. Hydraul. Div., Proc. ASCE, Vol.96, No.HY7, 1469-1483, 1970

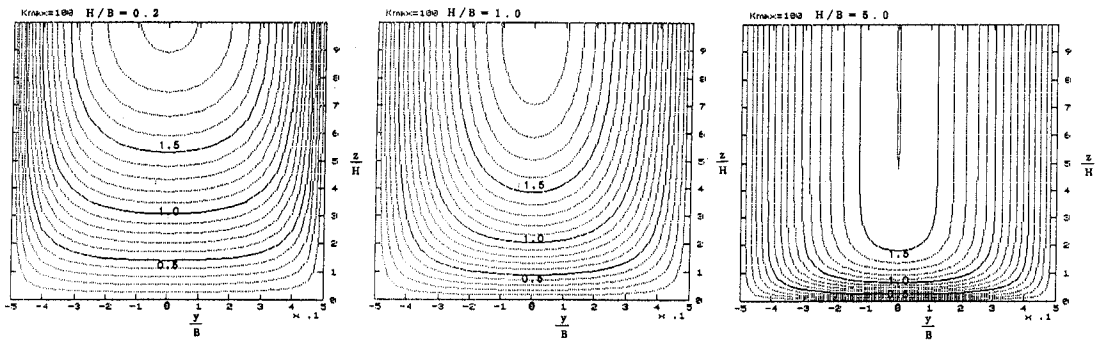


図-2 流速 u/u_m の分布図

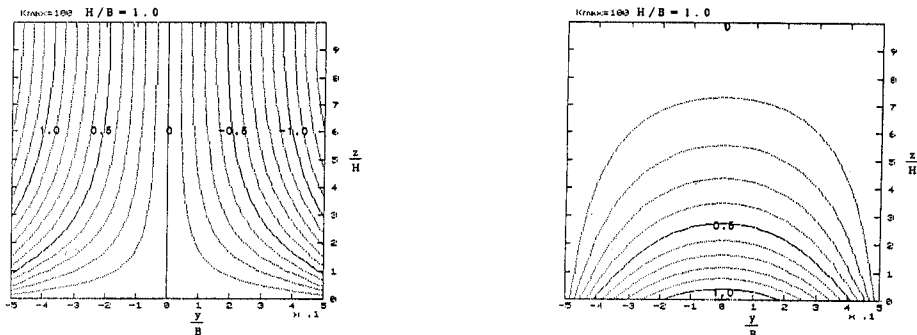


図-3 せん断応力 τ_{yx}/τ_0 の分布図

図-4 せん断応力 τ_{zx}/τ_0 の分布図

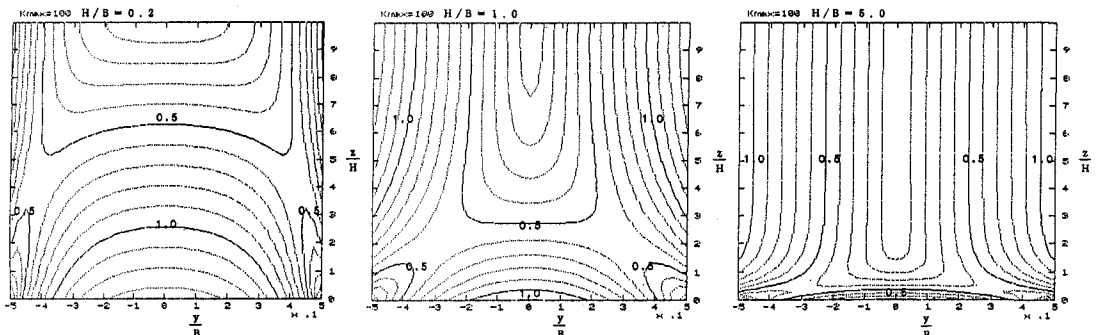


図-5 合成せん断応力 τ/τ_0 の分布図