

II-70 USG-GMD 浅水流数値解析法

北海道大学 工学部 森 明 巨

北海道大学 工学部 板 倉 忠 興

1. はじめに 流れの多次元数値解析法は計算域形状に対する対応と移流項の扱い方によって基本構造が特徴づけられる. ここ数年の航空力学では前者については UnStructured Grid (USG) の使用が著しく増加している. 航空機形状の複雑さ故に一般座標系では過剰な負担がかかるためである. 後者については、研究例はまだ少ないが Genuinly Multi-Dimensional (GMD) が注目を集める様になってきた. GMDは多次元双曲型方程式の風上差分を合理的に行おうとするものである. 単に各座標方向に風上差分を行うのは座標系依存の解となってしまう. 本研究は、複雑な河川地形における正確な河床波を再現するためにUSGとGMDを組み合わせた計算法の開発を目指したものである. この型の計算法の研究はまだ初期の基礎理論開発の段階であることから、本研究ではごく単純なモデルでこの計算法の特徴を調べたが、予想どおりに一次精度でもかなり高い分解能を持っていることがわかった.

2. 基礎方程式とモデル

基礎方程式は(1)式である.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} = \Omega \quad (1)$$

図-1 USG

$$\phi = \begin{pmatrix} h \\ E \\ G \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} E^2/h - g h^2/2 \\ EG/h \end{pmatrix}, \quad \Psi = \begin{pmatrix} G \\ G^2/h - g h^2/2 \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 \\ -gh \partial Z / \partial x - f E \\ -gh \partial Z / \partial y - f G \end{pmatrix}$$

$E = u h$, $G = v h$, $f = g n^2 \sqrt{u^2 + v^2} / h^{4/3}$ 、 u, v : 流速成分、 h : 水深、 Z : 河床高、 n : 粗度係数.

計算点を図-1の様に三角形で結ぶ(本研究ではDelaunay網である). USGの有限体積法を用いる場合には、各計算点間の境界を通過する運動量および流量fluxの評価に風上効果を取り込むことができるが、これは一次元の風上で GMDとはならない. 本研究では、Roe¹⁾による Flux-Difference-Split(FDS)の考えを用いてGMDを作る. 三角形頂点の Φ 、 Ψ の値から要素内のこれらの値を線形内挿(一次精度)して、三角形要素の flux difference $F D = \phi_i = \Phi_x + \Psi_y$ を求める. これを特性量の伝播方向に応じて各計算点に配分する. (1)式を(2)式の様に書いたとき特性方程式 $|A - \lambda B| = 0$ の λ の根がすべて実根であれば、(2)式は対角行列 D_x 、 D_y を用いて(3)の様に書いて、特性量 W の伝播方向が D_x 、 D_y で与えられる.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} = \Omega \quad (2) \quad \frac{\partial W}{\partial t} + D_x \frac{\partial W}{\partial x} + D_y \frac{\partial W}{\partial y} = \Omega_w \quad (3)$$

$$A = \partial \Phi / \partial x \quad B = \partial \Psi / \partial y$$

一般には λ は実根とはならないため、Roe²⁾は波動の物理的モデルの構築を考えた. また、Hirschら³⁾は近似的に(3)式を満たす実数の λ を選び、誤差をsource項に含ませて、これについては中央差分を行っている. 両者ともかなり複雑である上に不十分な点が多い. また、本研究が用いるRoe法ではA、Bの線形化法やfluxの計算点への配分法なども確立していない. この様な研究の現状と本研究は河床変動計算につなぐ前段階であることから次のような簡単なモデルを用いてみた.

(1)式において圧力項を右辺のソース項 Ω に含ませて、特性方向を総て移流方向に縮退させる. これは、Hirsch法の最も単純な場合で、差分法では流線に沿った座標系を用いたJameson法⁴⁾に相当する. 物理的には圧力項は保存量として左辺の Φ 、 Ψ に含ませた方がよい. この欠点をFDの配分で考慮する. E 、 G に関する配分 α_i は、 $v s_i > 0$ のとき $\alpha_i = v s_i / \alpha$ 、 $v s_i < 0$ のとき $\alpha_i = 0$ 、 $\alpha = \sum \alpha_i$. h に関する配分 β_i

は、 $\beta_i = 1/\beta$ 、ただし $F > 1, v \cdot s_i < 0$ のとき $\beta_i = 0$ 、 $\beta = \sum \beta_i$ 、 v は流速ベクトル、 s_i は、三角形の重心から各頂点に向かう単位ベクトル。

3. 計算結果 河床勾配=0.01、幅=20mの矩形断面直線水路に計算区間200mをとり、図-1のようにランダムに計算点を配置する。計算点数N=94である。側壁の粗度=0、河床粗度=0.02。ただし、図中の点線内A域の粗度は0.2。流量は $20\text{m}^3/\text{sec}$ 。境界条件は、上流端で $E=1\text{m}^3/\text{sec}$ 、下流端は $n=0.02$ に対する等流水深0.38m。等流に対するフルード $F=1.36$ である。

図-2、3は計算された水深の縦断変化と流速のベクトルである。A域周辺の流れの急激な変化がとらえられている。USGでは任意に計算点が追加できる。三角形要素を構成する計算点間の絶対速度差 $|v_1 - v_2| > V_c$ のときにその中点に計算点を加える。図-4~7は、 $V_c=1\text{m/sec}$ のときの計算結果である。流れの急変部に23点加わってN=120である。図-4はFの等高線で、A域上流側で射流から常流に移している。この遷移域における水位線傾きの、図-5の水深等高線に一点鎖線で示したように $F=1.38$ に対する Mach角 $=\sin^{-1}(1/F)=45^\circ$ にほぼ等しい。計算点を加えた効果を縦断水位について見ると(図-2と7と比較)、密な計算点配置では鋭い水位変化が得られること、また、粗な計算点配列では水位変化が過大になっていることがわかる。図-8は、A域周辺流速ベクトル図の拡大である。これと図-3、6を比較すると、流れが大きく変化するのは極狭い範囲であり、構造格子に対するUSGの有利性がわかる。

4. おわりに ここで用いたモデルはUSG-GMDの最も単純なものに属するが、その特徴がよく表れて、一次精度でも高い分解能をもつことがわかった。特に、常流-射流の混在する流れに適する。

5. 参考文献 1)P. L. Roe, Proc. 7-th Int. Conf. Num. Meth. Fluid. Dyn., 1981 2)P. L. Roe, Jour. Comp. Phy. vol. 63, 1986.
3)Ch. Hirsch and C. Lacor, AIAA-89-1958, 1989
4)A. Jameson, Comm. Pure Appl. Math., vol. 27, 1974.

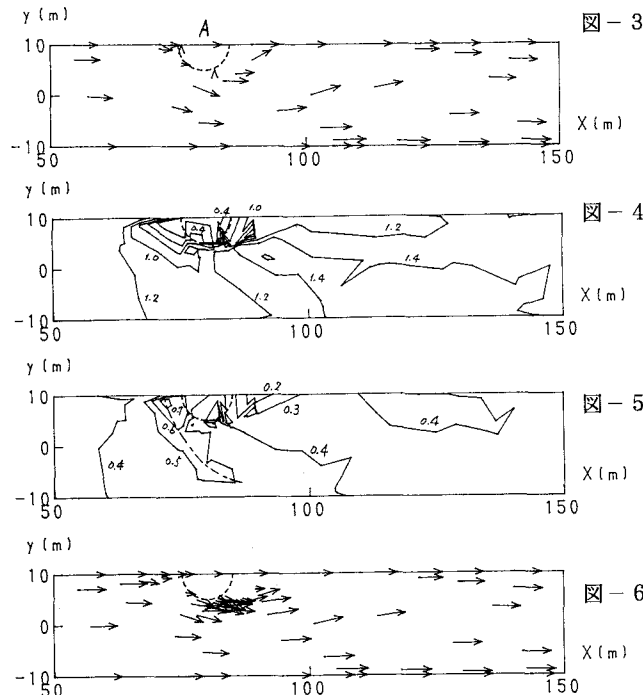


図-3

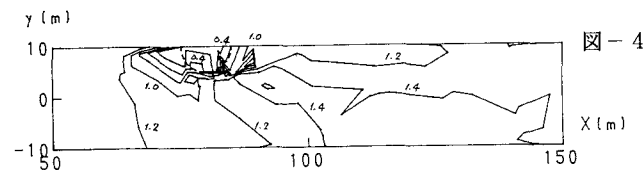


図-4

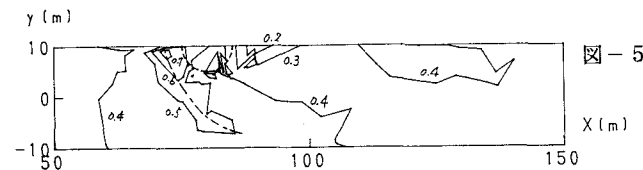


図-5

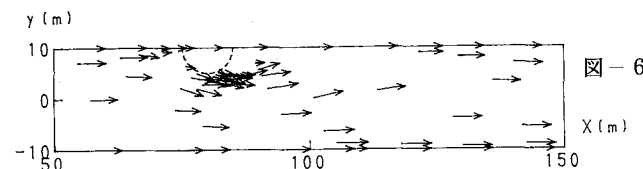


図-6

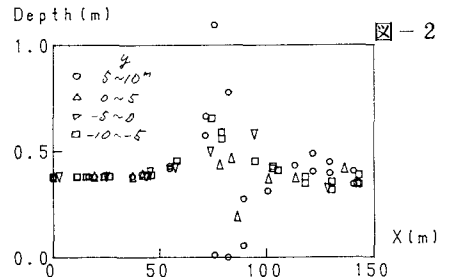


図-2

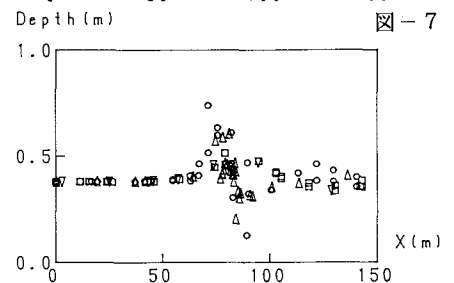


図-7

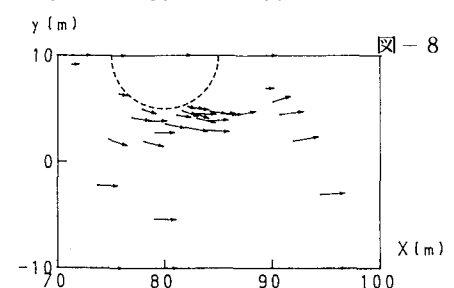


図-8