II-69　定常平面２次元流れの水面形解析法に関する一考察

京都大学工学部　正　員　細田　尚
電力中央研究所　正　員　米山　望

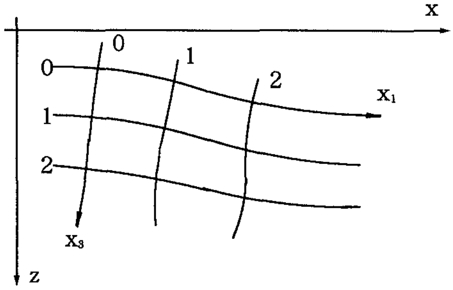
1. はじめに： 本研究は、常微分方程式の特異点理論の応用として体系化されている１次元水面形解析法[1)]の、平面２次元場への拡張について考察したものである。まず、用いられる基礎式と解析法の概要について述べる。その後、具体的な応用例として幅の変化する水路の流れを取り上げ、流れの全域が高速流の場合および常流から高速流への遷移が生じる場合の水面形解析結果を示す。

2. 基礎式： 側岸の平面形状が任意の水路や河川の流れを考え、基礎式として直交曲線座標系における定常平面２次元流れの基礎式を用いる（図－１参照)。

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(h_3 u_1 h) + \frac{\partial}{\partial x_3}(h_1 u_3 h) = 0 \qquad (1)$$

$$\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1^2 h h_3) + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(u_1 u_3 h h_1) + \frac{u_1 u_3 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{u_3^2 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_1} = -\frac{gh}{h_1}\frac{\partial y_s}{\partial x_1} - \frac{\tau_{b1}}{\rho} \qquad (2)$$

$$\frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial x_1}(u_1 u_3 h h_3) + \frac{1}{h_1 h_3}\frac{\partial}{\partial x_3}(u_3^2 h h_1) + \frac{u_1 u_3 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_3}{\partial x_1} - \frac{u_1^2 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} = -\frac{gh}{h_3}\frac{\partial y_s}{\partial x_3} - \frac{\tau_{b3}}{\rho} \qquad (3)$$



図－１　座標系

ここに、(u_3, u_1)；水深平均流速ベクトルの成分、h；水深、$y_s(=y_b+h)$；基準水平面からの水位、y_b；基準面からの路床高さ、(τ_{b3}, τ_{b1})；路床に作用する応力ベクトルの成分、(x_3, x_1)；空間座標、(h_3, h_1)；規模因子。

3. 流線上で成立する水面形方程式：

流れの対象領域を直交曲線網で覆い、x_3=const.線が流線であると仮定する。このとき、流線上で $u_3=0$ となるため、(2) および (3) 式は流線上で成立する次式となる。

$$\frac{d}{h_1 dx_1}(u_1 h h_3) = 0,\ q \equiv u_1 h h_3 = \text{const.} \qquad (4) \qquad \frac{d}{h_1 dx_1}(u_1^2 h h_3) + g h h_3 \frac{dh}{h_1 dx_1} = -g h h_3 \frac{dy_b}{h_1 dx_1} - \frac{\tau_{b1}}{\rho} h_3 \qquad (5)$$

(4) および (5) 式が定常平面２次元流れにおける水面形解析の基礎式であって、(4) 式を用いて (5) 式を書き換えれば次のようになる。

$$\frac{1}{h_1}\frac{dh}{dx_1} = \frac{\dfrac{hq^2}{g(hh_3)^3}\dfrac{dh_3}{h_1 dx_1} - \dfrac{dy_b}{h_1 dx_1} - \dfrac{\tau_{b1}}{\rho g h}}{1 - \dfrac{q^2}{g h^3 h_3^2}} = \frac{f_1(h, x_1)}{f_2(h, x_1)} \qquad (6)$$

(6) 式において、分母＝0（$f_2(h,x_1)=0$）となる水深が一本の流線上の限界水深を与え、分子＝0 となる水深が擬似等流水深を与える。

4. 流れが全域にわたって常流または高速流の場合の解析法：

まず、対象領域の中で流れの遷移が生じない場合の解析法を箇条書きにして示そう。

① 最初に仮定した流線網の上流または下流端で、境界条件として水深 h および q を与える。

② (6) 式を全流線に沿って上流端から下流端に向かってまたはその逆に計算し、流線上の水深を求める。

③ 仮定した流線網が正しいならば、(3) 式から $\frac{u_1^2 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{gh}{h_3}\frac{\partial y_s}{\partial x_3} = 0$ が成立するはずであるが、実際には誤差が生ずる。この誤差を流線網を修正することによって収束させる。具体的には、まず次式で格子点上の u_3 を計算する。

$$u_3=\frac{\Delta t}{h}\left(\frac{u_1^2 h}{h_1 h_3}\frac{\partial h_1}{\partial x_3}-\frac{gh}{h_3}\frac{\partial y_s}{\partial x_3}\right)$$ ，Δt; 時間増分値

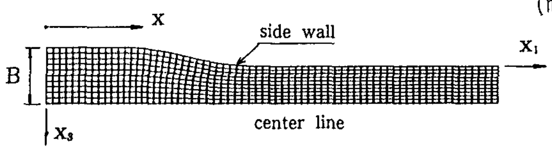
④　このu_3を用いて、格子点の流れ関数Ψを $u_3 h h_1=-\frac{\partial \Psi}{\partial x_1}$ で計算する。この計算は、流線に沿ってqが上流端で与えられる場合には上流から下流に、下流端で与えられる場合にはその逆に行われる。

⑤　流線の位置を、流線上でΨの値が一定と成るようにx_1 = const.上で移動させ、直交曲線網（流線網）を組み直す。直交曲線網の生成法は、参考文献２を参照されたい。

⑥　②～⑤をu_3が十分小さくなるまで繰り返す。

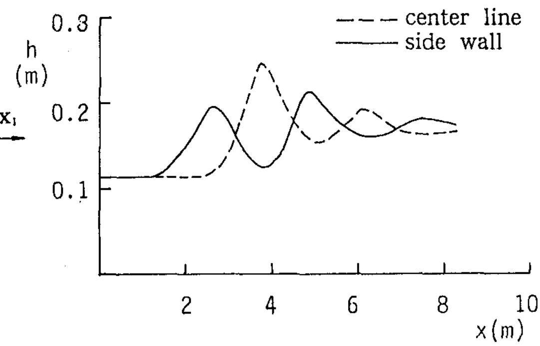
以上述べてきた方法を高速流の水面形解析に適用してみよう。図－２に対象とする水路と初期流線網および水理諸量を示した。この条件の下で得られた流線網と水深分布を図－３、４に示した。従来の特性曲線法を用いた計算結果[3]と定性的には一致している。

B = 1.0 (m), 路床勾配 = 1／80,
上流端単位幅流量= 0.3 (m³／s), n=0.01



図－２　計算の条件

図－３ 計算結果（流線網）



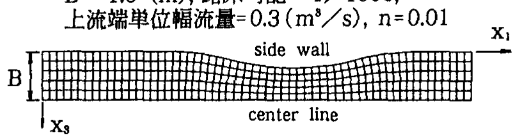
図－４　計算結果（水深分布）

5. 流れが上流から高速流に遷移する場合（特異点が鞍形点の場合）の解析法：

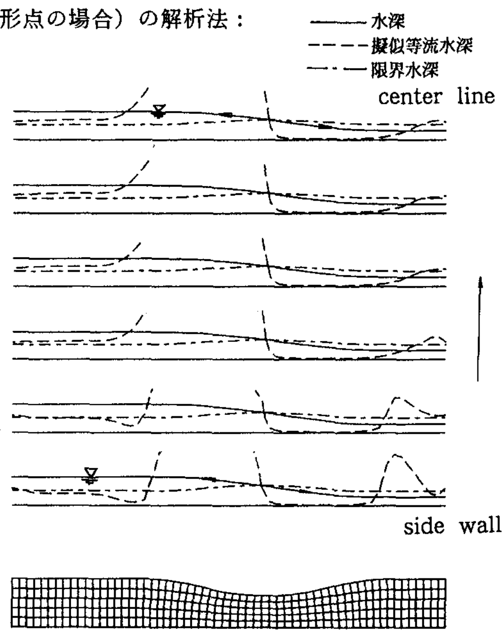
対象領域の中で流れが遷移する場合には、仮定した初期流線網を用いて、あらかじめ一本の流線上で特異点の位置および水面勾配を求めておく必要がある。その後に、特異点の上下流に向かって水面形を計算し、4.と同様に流線網を修正する。一本の流線上で特異点の位置と水面勾配を求める方法は、基本的には１次元解析法で用いられる方法と同様であるので省略する。

図－５に対象とする流れの領域と初期流線網を示した。図－５の流線網を初期条件として、収束計算を施した後の水面形を図－６に示した。この計算結果には擬似等流水深に振動が見られ、また流線網が十分に収束しているかなど現時点では不明の点もあり、今後より詳細な検討を行う必要がある。

B = 1.0 (m), 路床勾配 = 1／1000,
上流端単位幅流量= 0.3 (m³／s), n=0.01



図－５ 計算の条件



図－６　水面形解析の結果

［参考文献］1）岩佐義朗：石原藤次郎編　水工水理学 2.漸変流の水理とその応用, 丸善,1972, 2）米山望：定常平面２次元流れの水面形解析法に関する水理学的研究, 京都大学修士論文, 1992, 3）岩佐義朗・細田尚：漸縮水路の高速流に関する数値解析, 京大防災年報第32号B-2, 1989,