

II-39 河岸侵食の数値計算の不安定について

北海道大学工学部 学生員 鷺尾 亨
北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男
北海道大学工学部 正 員 板倉 忠興

1. はじめに

わが国の河川では、堤防や護岸の建設により流路変動を極力抑える努力が続けられているが、今だに自然河岸のまま放置されている所も少なくない。また、最近では自然に近い河川改修が指向され、出水時の河岸近傍の力、河岸侵食の評価の必要性が増大している。本研究では、河岸侵食の簡便な評価を実現するため、河岸侵食の数値計算法の安定条件について検討を行った。

2. 河岸侵食の評価式

縦断方向に一様で、図-1のような滑らかな横断面形状を有する水路を考える。横断面形状の時間的な変化は、次の流砂の連続式を用いて評価できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} - \frac{1}{1-\lambda} \frac{\partial q_{py}}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここに、 z ：局所河床高、 q_{py} ：横断方向流砂量で水路中央方向を正とする、 λ ：空隙率。

滑らかな横断面形状の河床せん断力 τ は、澤井ら¹⁾の方法を用い次式で与えられる。

$$\tau = \rho g h S_0 \cos \theta \left[1 + \left(\frac{\partial h}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} h \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right] \quad (2)$$

ここに、 θ ：境界面の横断勾配角、 S_0 ：エネルギー勾配、 h ：水深、 g ：重力、 ρ ：水の密度

せん断力の横断方向分布が計算できると、横断方向流砂量 q_{py} の評価が可能になる。ここでは、簡単のため非粘着材料で単粒径の場合を対象にする。側岸部における横断方向流砂量 q_{py} は次式のようになる。²⁾

$$\frac{q_{py}}{\sqrt{s g d^3}} = q_B^* \cdot \tan \gamma = 8 (\tau_* - \tau_{*cs})^{1.5} \cdot \frac{\tan \theta}{\mu_s} \sqrt{\frac{\mu_s \tau_{*cs}}{\mu_k \tau_*}} \quad (3)$$

ここに、 $s = (\rho_s - \rho) / \rho$ ：砂粒子の水中比重、 d ：砂粒子径、 μ_s ：静止摩擦係数、 μ_k ：動摩擦係数、

γ ：砂粒子の運動ベクトルと主流ベクトルの偏角、 $\tau_* = \tau / \rho s g d$ ：無次元掃流力

τ_{*ch} ：水平床の無次元限界掃流力、 τ_{*cs} ：側岸部の無次元限界掃流力で次式で与えられる。

$$\tau_{*cs} = \tau_{*ch} \cos \theta \sqrt{1 - \left(\frac{\tan \theta}{\mu_s} \right)^2} \quad (4)$$

3. 数値計算の不安定原因

短時間の変形を対象とする限り、 $z + h = \text{const}$ として一般性を失わない。この仮定の下では、式(1)は次式のように変形できる。

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial q_{py}}{(1-\lambda) \partial h} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

式(5)は移流方程式の形になっており移流速度は、

$$C = \frac{\partial q_{py}}{(1-\lambda) \partial h} \quad \text{で表される。この方程式を差分で解くには、}$$

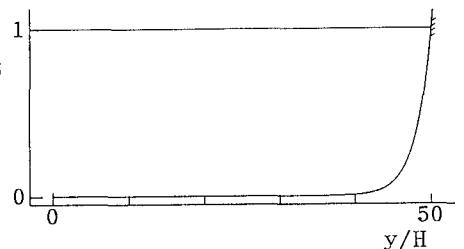


図-1 横断面形状

$C > 0$ の場合後退差分をとり、 $C < 0$ の場合前進差分をとることが、安定条件の一つとして必要である。

ところが、図-1に対応する q_{py}^* の分布は図-2の $\Delta t = 0$ のようになり q_{py}^* は河岸近傍で極大値をもつ。これは τ_* および q_* は y の正の方向に単調減少、 $\tan \gamma$ は単調増加することから生じる性質である。しかるに、 $\frac{\partial z}{\partial y}$ は単調増加するから、式(1)、(5)を比較すれば、 C は負から正へと必ず変化することになる。したがって、たとえ $C < 0$ の区間を前進差分、 $C > 0$ の区間を後退差分とし、数値計算を行っても差分方向の変更点から擾乱が発生し、短時間のうちに計算不能になる。これは、常・射流混在流の不等流計算の場合と同様である。例として河岸部における流砂量の横断分布の時間変化を図-2に示す。 q_{py}^* に擾乱が生じ、時間とともに増大していることがわかる。

4. 安定な計算法

このような原因で生じる不安定を解消するには、保存型の解法が有効である。ここでは、MacCormac法を用いて計算を行ってみる。ただし、いわゆる数値粘性の類は入れていないことを付記して置く。

MacCormac法による差分のスキームは、次のとおりである。

$$\text{predictor step} \quad \tilde{z}_i = z_i^k + \frac{\Delta t}{\Delta y} (q_i - q_{i-1})^k$$

$$\text{corrector step} \quad \hat{z}_i = \tilde{z}_i + \frac{\Delta t}{\Delta y} (\tilde{q}_{i+1} - \tilde{q}_i)$$

$$z_i^{k+1} = \frac{1}{2} (z_i^k + \hat{z}_i)$$

初期形状から水際における θ が安息角を越える直前で $50 \Delta t$ ごと $150 \Delta t$ までの q_{py}^* の時間変化を図-3に示す。なお図は $50 \Delta t$ ごとに縦軸の値を一目盛りつつ、づらして重ねてある。

5. おわりに

本研究は、河岸侵食の数値計算に生ずる不安定の原因を明らかにして、その解決法を示したものである。

（参考文献）

- 1) 澤井・芦田：粘着性流路の侵食と横断形状に関する研究，土木学会論文集，1977
- 2) 安藤・黒木・板倉：混合粒径からなる粘着性河岸の侵食，土木学会北海道支部論文集，1992

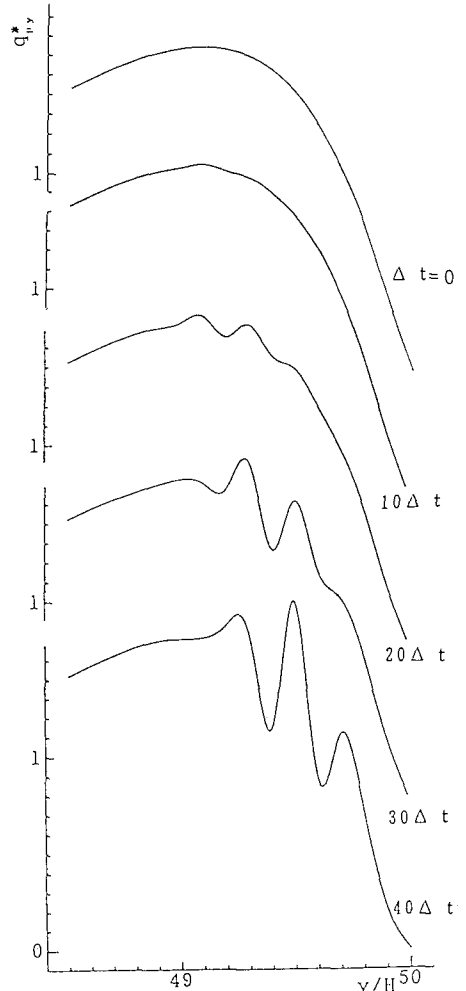


図-2 河岸部の q_{py}^* の時間的変化

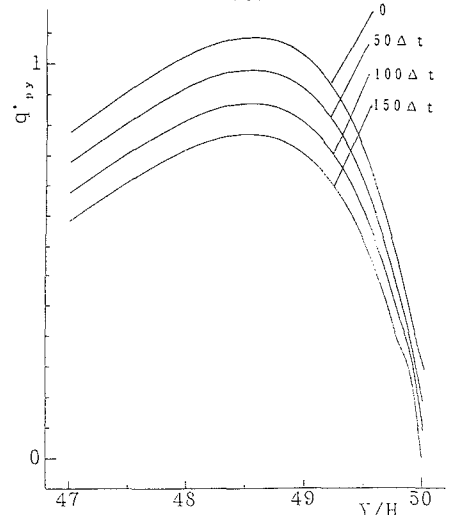


図-3 河岸部の q_{py}^* の時間的変化