

II-37

MacCormack法に基づく1次元河床変動計算について

徳島大学工学部 正員 ○岡部 健士

徳島大学大学院 学生員 穴瀬 康雄

1. まえがき

1次元河床変動の追跡計算では、定常不等流の計算と河床変動量の計算を個別に逐次繰り返す、いわゆる片押し方式の計算法を用いるのが一般化している。しかし、山地河川のように、常流と射流が混在し、さらに、その遷移が不特定の場所で生じることが多い場合には、不等流の計算を円滑かつ確に実行することが極めて困難となる。本文では、遷移を伴う開水路流れの数値計算においてその有用性が検証されているMacCormack法^{1)・2)・3)}(以下、MC法と略記する)を用いた河床変動計算モデルを示すとともに、模型実験への適用を通して、その適合性を検討した結果について報告する。

2. 基礎式ならびに計算法

長方形断面水路内の一樣粒径の掃流砂による河床変動について考えよう。流れを1次元漸変流とみなし、支配方程式の連続式および運動方程式を保存形で記述すれば、それぞれ(1)および(2)式となる。ここに、 t =時間、 x =河床に沿う距離、 A =流積、 Q =流量、 z =河床の高さ、 B =河床幅、 P =断面の合圧力、 i_b =河床勾配、 i_f =摩擦勾配、 ρ =水の密度、 g =重力加速度。また、流砂と河床砂の間の連続条件式は(3)式のように書かれる。ここに、 q_s =単位幅当たりの流砂量、 λ =河床の空隙率である。なお、以下の記述を簡単にするために、(1)~(3)式をベクトル形式にまとめて表示すると(4)および(5-a~c)のようである。

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = -B \frac{\partial z}{\partial t} \quad (1)$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{P}{\rho} + \frac{Q^2}{A} \right) = g A (i_b - i_f) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{ (1-\lambda) B z \} + \frac{\partial}{\partial x} (B q_s) = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = C \quad (4)$$

$$U = [A, Q, (1-\lambda) B z] \quad (5-a)$$

$$E = [Q, P/\rho + Q^2/A, B q_s] \quad (5-b)$$

$$C = [-B \partial z / \partial t, g A (i_b - i_f), 0] \quad (5-c)$$

さて、本研究で用いたMC法は2-Step Lax-Wendroff法と同様な2段階・陽的差分法であり、粗い近似を行う“予測子段階”と、この結果を用い、時間stepを1/2にして近似精度を高める“修正子段階”から構成されている。筆者らが用いた各段階の差分方程式は下記のような⁴⁾。

$$\text{予測子段階: } U^p_i = U_i - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E_{i+1} - E_i) + \Delta t C_i + V_i \quad (6)$$

$$\text{修正子段階: } U^c_i = \frac{1}{2} \{ (U_i + U^p_i) - \frac{\Delta t}{\Delta x} (E^p_i - E^p_{i-1}) + \Delta t C^p_i + V^p_i \} \quad (7)$$

ここに、 Δt =時間間隔、 Δx =断面間隔、 V =人工粘性であり、下付き添字“ i ”は、流れ方向の順に付した断面番号、上付き添字“ p ”および“ c ”は、それぞれ予測子段階および修正子段階での解あるいはこれらより求める値であることを示す。

$$D_i = K_v u_* i h_i (U_{i+1} - 2U_i + U_{i-1}) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (8)$$

V_i は、(8)式のように定義される D_i を用い、(9-a)および(9-b)のように定義

$$\text{予測子段階: } V_i = -(D_{i+1} - D_i) \quad (9-a)$$

$$\text{修正子段階: } V_i = +(D_i - D_{i-1}) \quad (9-b)$$

した。(8)式中、 u_* =摩擦速度、 h =

水深である。また、 K_v は経験係数で、岡部ら³⁾によれば、1~5程度が適当のようである。

3. 実験値との比較検討

実験には、長さ14.0m、深さ0.4mで、幅が図-1に示すように変化する長方形断面直線水路を用いた。本水路内に粒径1.0mmの均一砂を敷詰めて2種(case A および case B)の初期河床を形成し、定常流量および下流端水位一定の条件のもとに、河床と水面の縦断形状の変化過程を観測した。

case Aおよびcase Bの実験結果を、それぞれ図-2 および図-3の実線で示している。case Aでは、ほぼ水平の初期河床が、全区間において常流の流れにより、河幅の狭窄部分においてのみ洗掘されている。一方、case Bでは、上流部がマウンド状になっていた初期河床が、急速に平坦化するとともに、下流部ではデルタの発達が顕著である。また、このcaseの流れは、常に3~4個の遷移断面を含むものであった。

上述のモデルによる計算結果は破線で描かれている。計算は、流れの抵抗式としてManning式を、流砂量式としては芦田・道上式を用い、 $\Delta x = 0.25\text{m}$, $K_v = 2.5$ として実行した。 Δt は、各stepごとに、全断面で流れに関するCFL条件が満たされるように算定した。(6)および(7)式をそのまま適用することができない上・下流端の断面の解は、別途用意したbox型の差分式で求めた。また、(2)式の圧力項の計算においては、その離散化式における運動量保存関係を考慮して、側壁からの圧力の寄与分を近似的に評価して付け加えた。

さて、前進するデルタの肩の直上流の短い区間を除き、極めて滑らかな計算結果が得られているとともに、計算値と実験値の適合性もほぼ満足できるものとなっている。上記区間において、水面形状、河床形状ともに解がわずかに振動するのはデルタ肩の断面の上下流で河床勾配が不連続的に変化することに起因している。現在、このような条件下においても安定した解が得られるよう、圧力項の計算法などに着目しつつ、モデルの改善を試みているところである。

4. あとがき

以上、常流・射流の遷移を伴う流れによる1次元河床変動の追跡において、MacCormack法に基づく数値計算法が有用であることを示した。今後は、混合砂礫床や河床の一部に固定床が存在するような、さらに複雑な問題への適合性を検討してゆくつもりである。

[参考文献]

- 1) 崇田ほか: MacCormack法を用いた不定流計算, 第45回土木学会年講, II, pp. 432-433, 1990.
- 2) 塩田ほか: 保存則系差分法のスキームの特性に関する考察, 第45回土木学会年講, II, pp. 438-439, 1990.
- 3) 岡部ほか: 常流・射流の遷移を伴う不等流の数値計算について, 水工学論文集, 36, pp. 337-342, 1992.
- 4) 日本機械学会編: 流れの数値シミュレーション, コロナ社, 第2章, 1989.

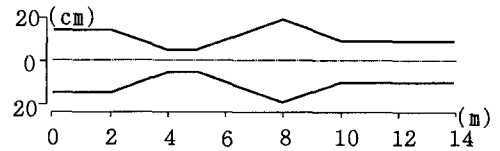


図-1 実験水路の幅の変化

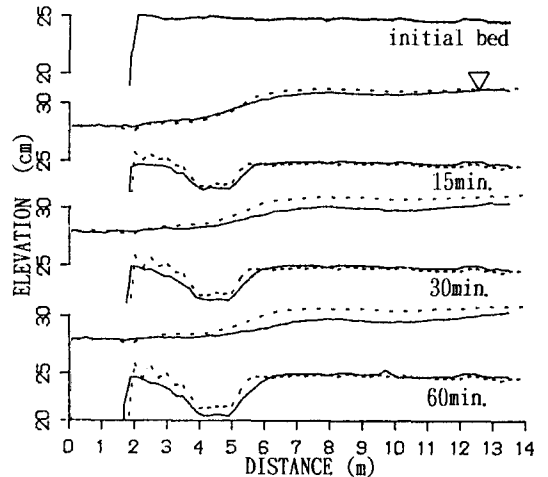


図-2 実験結果と計算結果の比較(case A)

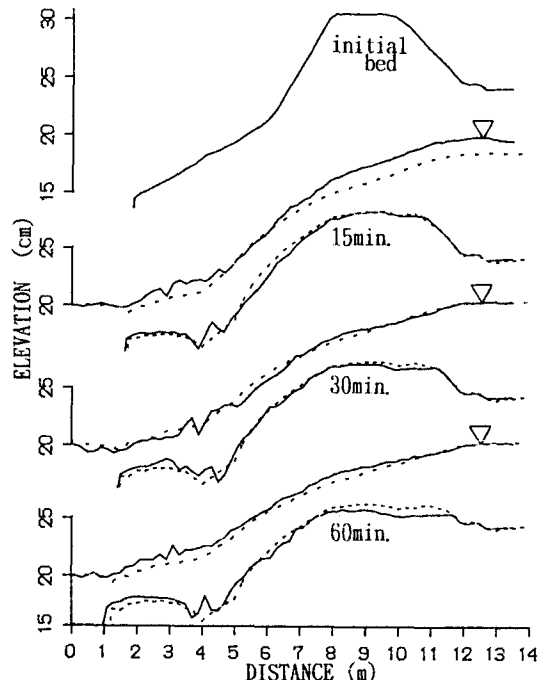


図-3 実験結果と計算結果の比較(case B)