I-522　確率分布の設定について

信州大学工学部　正員　長　尚

1 まえがき

安全性を破壊確率もしくは安全性指標で議論するとき、強度項の確率分布とそのパラメータの設定によっては、ある一定水準以上の安全性を確保できないという性質がある。この現象は実際的でない荷重項の下限値が、意識されずに結果的に、設定されて起きる場合が多い。また変動係数の大きい対数正規分布は、確率密度曲線の上裾野の形状が極めて特殊となる。強度項、荷重項共に不用意に確率分布とそのパラメータを設定すると、必要以上に設計強度を高めたり、異常に安全性を低く評価したり、設計不能になったりするような事態が起きるので、十分注意しなければならない。

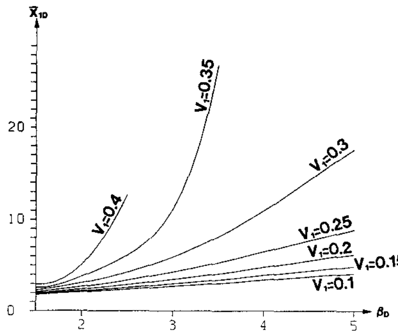
2. 強度項の確率分布

①破壊確率の上下限値の存在　いま強度項をR、荷重項をSとすると破壊基準関数g (x) は次のようになる。$g(x) = R - S$ ･･･(1)　この場合の破壊確率p_fは次式である。$p_f = P_r(R - S \leq 0)$ ･･･(2)　ところで、R、Sは共に通常負となる確率は小さく、Rが負でかつSがこれを下回る確率はRが負でかつSがこれを上回る確率より小さい。したがって確率変数Sの存在は破壊確率を下げる働きをするから、Sの影響がない場合の破壊確率、すなわちRが負となる確率である次のp_f^Lが破壊確率の下限値となる。$p_f^L = P_r(R \leq 0) = F_R(0)$ ･･･(3)　ここに、$F_R(\cdot)$は強度項Rの分布関数である。またSが正でかつRがこれを上回る確率はSが正でかつRがこれを下回る確率より大きい。したがって確率変数Sの存在は破壊確率を下げる働きをするから、Rの影響がない場合の破壊確率、すなわちSが正となる確率である次のp_f^Uが破壊確率の上限値となる。$p_f^U = P_r(S \geq 0) = 1 - F_S(0)$ ･･･(4)　ここに、$F_S(\cdot)$は荷重影響Sの分布関数である。したがって破壊確率p_fはこれらの上下限値の範囲内にある。$p_f^L\,[\equiv F_R(0)] \leq p_f \leq p_f^U\,[\equiv 1 - F_S(0)]$ ･･･(5)　また破壊確率p_fに関連する安全性指標βについては、Φを標準正規分布関数とすると次式が成立する。$\beta^L\,[\equiv \Phi^{-1}\{F_S(0)\}] \leq \beta \leq \beta^U\,[\equiv \Phi^{-1}\{F_R(0)\}]$ ･･･(6)　以上のように、強度を幾ら高めても破壊確率を$p_f^L\,[\equiv F_R(0)]$以下の安全の水準にすることは不可能である。逆に強度が幾ら低くても破壊確率が$p_f^U\,[\equiv 1 - F_S(0)]$以上の低い水準になることはない。ところで、通常の問題では$p_f \ll 0.5$ ･･･(7)　であるから$p_f^U\,[\equiv 1 - F_S(0)] \gg 0.5$ ･･･(8)　であるp_f^Uの実質的な意味はない。しかし、設計で目標とする安全の水準の破壊確率以上となり得るp_f^Lが存在するのは問題である。強度項と荷重項の確率分布を正規分布だとすると、$p_f^L = \Phi(-1/V_R)$ ･･･(9)、$\beta^U = 1/V_R$ ･･･(10)となる。ここにV_Rは強度項の変動係数である。例えば$V_R = 0.3$とすると、$\beta^U = 2.5$、$p_f^L = 0.0062$である。なお荷重項が正規分布でなくても、強度項が正規分布であればこのような関係は成立する。このように強度が正規分布で変動係数がある程度大きくなると、強度が負となる可能性が高く、その確率以下の安全性を確保する設計は不可能となる。同様なことは正規分布以外でも起きる。ワイブル分布［下限値＝平均値－λ（標準偏差）］、ベータ分布［上下限値＝平均値±λ（標準偏差）］の例についてのβ^U、p_f^Lを示すと表－1のようになる[1]。さて強度を幾ら高めても破壊確率をp_f^L以下の、もしくは安全性指標β^U以上の安全の水準にすることが不可能となるのは、負の強度の可能性をかなりあり得るとした確率分布の設定が、実際的でないことによっている。勿論、通常は統計データに基づいて確率分布とそのパラメータを決定するのであるから、理論的には非現実的な下限値が設定されるはずはない訳である。しかし実際には下限の裾野のデータは非常に少なく、結果として非現実的な下限値を設定する場合もあることになる。また安全性全般を論じるために、計算の便宜から特定の確率分布としたり、種々な確率分布を用いてパラメトリックに検討することがある。このような場合、具体的なデータによらず確率分布とそのパラメータを設定することがあり、結果的に非現実的な下限値を設定することもあり得る。

表－1　β^U、p_f^Lの例

V_R		0.3333	0.4	0.5
ワイブル分布	λ	4	3	3
	β^U	3.03	2.90	2.09
	p_f^L	0.0012	0.0019	0.018
ベータ分布	λ	5	3	3
	β^U	3.24	2.99	2.11
	p_f^L	0.0006	0.0014	0.013

②非負の下限値x_Lが非常に小さい場合の問題点　強度項の下限値x_Lが非負の値であっても、0もしくは0に近いような場合にも困った事態が発生する。このような場合には荷重項の確率密度曲線と強度項の確率密度曲線の重なる領域が大きくなり、ある安全性の水準を確保するためには設計値（例えば強度項の平均値もしくは公称値）を極端に大きくしなければならなくなる。このことを一般論で具体的に指摘することは困難だが、ここでは1つの例を示すことにする。 $g(x) = x_1 - x_2$・・・(11)　$\beta_D = 1.5 \sim 5$・・・(12)　$\overline{x}$（平均値）＝ $(\overline{x_{1D}}\ 1.0)^T$・・・(13)　D（確率分布）＝（ワイブル分布［$\lambda = 3$］ 正規分布$)^T$・・・(14)　V（変動係数）＝ $(V_1\ 0.5)^T$・・・(15)　$V_1 = 0.1, 0.15\ 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4$・・・(16) この例の設計値$\overline{x_{1D}}$は中央安全率に相当する。結果を図－1に示す。$x_1$の下限値が0以上となる変動係数は$V_1 \leqq 1／\lambda = 0.3333$・・・(17) である。この例から分るように、設計で目標とする安全性指標β_Dがある程度大きい場合には、ワイブル分布の下限値が0に近付くにしたがって、つまりV_1が式（17）の値（$1／V_1$がλの値）に近付くにしたがって、中央安全率が急激に大きくなっている。強度項の確率分布とそのパラメータが、下限の裾野付近の十分なデータに基づいて決定されてこのような結果となることもありえよう。しかし通常は強度項の確率分布とそのパラメータの設定が不適切で、実際にはあり得ないような低い強度の存在を許したことになっているので注意を要する。 **③確率分布設定上の注意点**　以上述べてきたように強度項の確率分布とそのパラメータを不用意に設定すると、意識していないが結果的に、強度項の下限値を実際的でない値とすることがある。そのため具体的な設計問題とか、安全性問題一般を誤って論じる危険性がある。例えば設計で目標とする安全のレベルが破壊確率p_{fD}で0.0001、安全性指標で$\beta_D = 3.7$程度の時、変動係数$V_R = 0.25$で正規分布としたり、$\lambda = 4$のワイブル分布とするのは、誤った結論を得ることになる。このような誤ちを避けるためには、式（5）、（6）で定義されるp_f^Uもしくはβ^Uに近いレベルが含まれるような議論とならないように、また下限値が非負であっても非常識な下限値が影響しないように、強度項の確率分布とそのパラメータを設定しなければならない。そのためには、強度項の下限値が0以下もしくは0に近い場合には、これを下回る確率が（実際に合致させて）十分小さくなるようにする必要がある。正規分布は下限値が$-\infty$で自由に下限値を設定できないから、変動係数が相対的に大きい場合はこの分布を用いないようにしなければならない。また下限値が0であるから、変動係数の大きい対数正規分布も使用を避ける必要がある。強度項を正規分布もしくは対数正規分布の確率変数として、一般論を展開することがしばしば行われるが、特に変動係数が大きい範囲も含む問題では、場合によっては誤った結論を導くことになる。なお本文では主として強度項をまとめて1変数として議論してきたが、一般には複数個の確率変数の関数である。このような場合も当然強度項が非常識な下限値となって不都合なことが起きないようにしなければならない。



図－1 下限値が非常に小さい例

3. 荷重項の確率分布

既に指摘した[2]ように、変動係数が大きい場合の対数正規分布は、変数の上裾野の部分の確率密度曲線の形が極めて特殊となる。このため設計で目標とする破壊確率p_{fD}がある程度小さい場合もしくは安全性指標β_Dがある程度大きい場合に、荷重項を対数正規分布だとすると、中央安全率を極端に大きくする必要性が生ずることになる。勿論統計的データが十分あり、変数の大きい部分の裾野のデータがこのような性状を持っている場合は対数正規分布として扱うべきである。しかし通常は裾野付近のデータが不十分でも対数正規分布としたり、またデータに必ずしもよらないで対数正規分布とすることがある。このような場合には、荷重項もしくはその一部を変動係数の大きい対数正規分布とするのは妥当性を欠くことになる。しばしば行われる荷重項を対数正規分布するものとした一般論には慎重な配慮が必要である。

参考文献 1) CHOU, Takashi et al.: PROBABILITI DISTRIBUTION BY STANDARDIZED VARIATE, Proc. of JSCE, 1985.
2) CHOU, Takashi: AVAILABILITY OF RELIABILITY INDEX FOR STRUCTURAL DESIGN, Proc. of JSCE, 1989.