土木学会第47回年次学術講演会（平成4年9月）

I-412　面内回転自由度を有する弾性問題の動的解析

法政大学工学部土木工学科　正会員　前田 重行
法政大学大学院工学研究科　学生員　渡部 正則
法政大学計算センター　正会員　武田 洋

1　まえがき

有限要素法による任意形シェル構造の解析における重要な問題の一つとして，面内回転自由度の取り扱いがある．単一の連続曲面から構成されるシェル構造の場合は面内回転自由度を含まない問題として統一的に処理することが出来るが，折れ板構造のように平面が不連続に結合した構造等では面内回転自由度を含まない問題としては統一的処理が困難となる．任意形シェル構造に対する汎用的な有限要素として面内回転自由度の導入が古くから提案されているが，近年静的な線形問題に対して Reissner の変分形式を基本とする統一的な定式化及び具体的な有限要素が提案され，静的線形問題に対して成功例が報告されている．ここでは慣性項を含む動的問題に対して同様のアプローチを行うために変位型定式のための基本的考察を行う．

2　基礎方程式

面内回転自由度を含む弾性問題に対する支配方程式は次式で与えられている [1].

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0} \tag{1}$$

$$\mathrm{skew}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \mathrm{skew}\boldsymbol{\nabla u} \tag{3}$$

$$\mathrm{symm}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\cdot\mathrm{symm}\boldsymbol{\nabla u} \tag{4}$$

ここで式 (1) はつりあい方程式，式 (2) は応力の対称条件，式 (3) は回転の定義，式 (4) は構成方程式を表わし，二階のテンソルは次のように対称成分と逆対称成分の和に分解できることを考慮した.

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathrm{symm}\boldsymbol{\sigma} + \mathrm{skew}\boldsymbol{\sigma} \tag{5}$$

ここで

$$\mathrm{symm}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^t) \tag{6}$$

$$\mathrm{skew}\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^t) \tag{7}$$

動的問題のために慣性項を考慮すると式 (1) は次のように表される.

$$\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{q} = \rho\ddot{\boldsymbol{u}} \tag{8}$$

また微分作用素の可換性を考慮すると式 (3) は次式をも意味する.

$$\ddot{\boldsymbol{\omega}} = \mathrm{skew}\boldsymbol{\nabla}\ \ddot{\boldsymbol{u}} \tag{9}$$

3　変位型支配方程式と弱形式

式 (8) に式 (2) と (4) を代入し，式 (3) とともに表すと変位型支配方程式は次のようになる.

$$\mathrm{div}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{symm}\boldsymbol{\nabla u}) + \boldsymbol{q} - \rho\ddot{\boldsymbol{u}} = 0 \tag{10}$$

$$\boldsymbol{\omega} - \mathrm{skew}\boldsymbol{\nabla u} = 0 \tag{11}$$

ここで上式に幾何学的境界条件を満足する以外は任意の重み $\overset{*}{\boldsymbol{u}}$ と $\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}$ を乗じ，領域全体に積分することにより次の弱形式が得られる．

$$\int \mathrm{symm}\nabla\,\overset{*}{\boldsymbol{u}}\cdot(\boldsymbol{C}\cdot\mathrm{symm}\nabla\boldsymbol{u})d\Omega+\gamma\int(\overset{*}{\boldsymbol{\omega}}-\mathrm{skew}\nabla\,\overset{*}{\boldsymbol{u}})\cdot(\boldsymbol{\omega}-\mathrm{skew}\nabla\boldsymbol{u})d\Omega+\int\overset{*}{\boldsymbol{u}}\cdot\rho\ddot{\boldsymbol{u}}d\Omega=\int\overset{*}{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{q}d\Omega \tag{12}$$

ここでパラメータ γ は回転の定義式 (3) のエネルギー表現において導入されるものであり，[1] ではせん断弾性係数を用いることが提案されているが，[2] では実際の数値計算における解はこのパラメータの値に左右されないことが報告されている．

4 有限要素定式

ここで変位と回転について次の有限要素補間を導入する．

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{N}_u^u\boldsymbol{u}^e+\boldsymbol{N}_u^\omega\boldsymbol{\omega}^e \tag{13}$$

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{N}_\omega^\omega\boldsymbol{\omega}^e \tag{14}$$

なおここでは整合型かつ Petrov-Galerkin 型の有限要素補間を用い，加速度および重みは変位と回転に対する補間と同一の補間を用いるものとする．上式より変位の物体座標に関する導関数は次のように表される．

$$\mathrm{symm}\nabla\boldsymbol{u}^e=\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^u\,\boldsymbol{u}^e+\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\,\boldsymbol{\omega}^e \tag{15}$$

$$\mathrm{skew}\nabla\boldsymbol{u}^e=\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^u\,\boldsymbol{u}^e+\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\,\boldsymbol{\omega}^e \tag{16}$$

$$\boldsymbol{\omega}-\mathrm{skew}\nabla\boldsymbol{u}^e=(\boldsymbol{N}_\omega^\omega-\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega)\boldsymbol{\omega}^e-\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^u\,\boldsymbol{u}^e=\boldsymbol{b}_\omega^u+\boldsymbol{b}_\omega^\omega\boldsymbol{\omega}^e \tag{17}$$

上の有限要素補間を弱形式 (12) に代入し整理することにより有限要素特性は次のようになる．

$$[\boldsymbol{k}^e]=\int\left[\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^u,\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\right]^t\boldsymbol{C}\left[\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^u,\overset{\triangle}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\right]d\Omega+\gamma\int\left[\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^u,\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\right]^t\left[\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^u,\overset{\triangledown}{\boldsymbol{B}}{}_u^\omega\right]d\Omega \tag{18}$$

$$[\boldsymbol{m}^e]=\int\left[\boldsymbol{N}_u^u,\boldsymbol{N}_u^\omega\right]^t\boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{N}_u^u,\boldsymbol{N}_u^\omega\right]d\Omega \tag{19}$$

ここで $[\boldsymbol{k}^e]$ は要素剛性マトリックス，$[\boldsymbol{m}^e]$ は要素質量マトリックスを表す．なお具体的な有限要素補間と要素剛性マトリックスと精度については [2] と [3] に与えられている．

5 あとがき

ここでは面内回転自由度を有する動的弾性問題の有限要素定式に関する基礎事項について考察した．今後の課題としては混合型有限要素定式に対する基礎的考察および具体的な問題に対する数値的検証が残っている．

参考文献

[1] T.J.R. Hughes and F. Brezzi, On drilling degrees of freedom, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng*, **72**, 105–121 (1989).

[2] A. Ibrahimbegovic, R.L. Taylor and E. Wilson, A robust quadrilateral membrane finite element with drilling degrees of freedom, *Int. j. numer. methods engng.*, **30**, 445–457 (1990).

[3] 前田，渡部，武田, 面内回転自由度を有する平面応力要素に関する考察, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，**15**, 139–144 (1991).