

I-411

一様熱流を受ける孔を有する無限板の混合境界値問題

鹿島建設(株) 正員 ○入倉英明
 名古屋工業大学 正員 長谷部宜男
 名古屋工業大学 正員 中村卓次

【まえがき】 一様熱流を受ける孔のある無限弾性板の外力境界値問題^[1,2]や変位境界値問題^[3]の解析は報告した。さらに、外力境界と変位境界が1ヶ所づつある混合境界値問題の解も報告した^[4]。そこで、今回は外力境界と変位境界が複数個存在する場合の一般解の誘導について報告する。任意形状の孔を有する無限領域を単位円外に写像する分数式の和の形の有理写像関数と *dislocation*法を用いて、任意方向からの一様熱流を受ける無限弾性板に対する混合境界値問題の一般解を導く。この混合境界値問題に対する解は、有理写像関数を適当に選ぶことにより任意の形状に、さらに、変位境界と外力境界の接合点の座標を動かすことにより固定端の位置を自由に定めることができる。

【解析モデル】 クラックを有する円形孔を例として説明する。一般性を失うことなく、境界上の外力および変位を零とすることができるので、無限板中に存在する剛体リングや熱を通さない性質を持つ剛体介在物等により変形を拘束されているモデルになる。さらに、剛体リングの剛体回転変位がない場合の解を誘導する。これは、形状と熱流の方向に対称性のある場合の解になる。対称性のない場合には、剛体回転の場合の解^[5]と今の場合の解を剛体リング上の合モーメントが零になるように重ね合わせればよい。また、一様熱流は、無限遠より角度 δ で作用し、境界面からの熱の出入りは考えない。

解析に際しては、図-1 [z-plane]を式①により図-1 [ζ-plane]の単位円外(S⁺領域)へ等角写像する^[1]。境界M_j(j=1, ..., n)を接合により変位拘束されている境界、境界L_jを剥離あるいはクラック発生により外力自由となっている境界とし、境界M_jの両端を時計廻りに α_j, β_j とする。

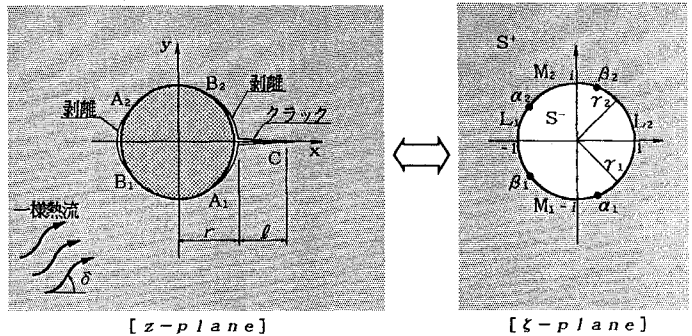


図-1 解析形状と単位円(変位境界,自由境界が2箇所の場合)

図-1 [z-plane]を式①により図-1 [ζ-plane]の単位円外(S⁺領域)へ等角写像する^[1]。境界M_j(j=1, ..., n)を接合により変位拘束されている境界、境界L_jを剥離あるいはクラック発生により外力自由となっている境界とし、境界M_jの両端を時計廻りに α_j, β_j とする。

$$z = E_0 \zeta + \frac{E_{25}}{\zeta} + \sum_{k=1}^4 \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_{-1} \equiv \omega(\zeta) \quad (E_k, \zeta_k: \text{形状により決まる定数}) \quad \text{①}$$

【解法】 単位円外で正則な複素応力関数を $\phi(\zeta), \psi(\zeta)$ とする。一様熱流を受ける無限板中に存在する孔あるいは介在物の境界条件式は次式で与えられる。ここに、P_x, P_yは境界L_j上に作用する外力、u, vは境界M_j上で与えられた変位である。外力、変位の与えられる混合境界値問題^[6]と熱流による混合境界値問題は別々に解いて重ね合わせればよいので、P_x=P_y=0, u=v=0として解くことができる。σは単位円上の点を、sは境界に沿う積分を表す。C_jはM_j境界上での合力に相当する定数である。

$$\phi(\sigma) + \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} + \overline{\psi(\sigma)} = i \int (P_x + i P_y) ds + C_j \quad \text{on } L_j \quad \text{②}$$

$$\kappa \phi(\sigma) - \frac{\omega(\sigma)}{\omega'(\sigma)} \overline{\phi'(\sigma)} - \overline{\psi(\sigma)} = 2G(u + i v) - 2G\alpha_0 \int \Psi(\zeta) \omega'(\zeta) d\zeta \quad \text{on } M_j \quad \text{③}$$

③式左辺第2項は一様熱流による変位を表す項であり、Ψ(ζ)は次式で表される^[1,2]。

$$\psi(\zeta) = -\frac{q}{k} \left(E_0 \zeta e^{-i\zeta} + \frac{\overline{E_0}}{\zeta} e^{i\zeta} \right) \quad (q : \text{熱流}, k : \text{熱伝導率}) \quad ④$$

いま、自由応力境界が存在することから、 $\phi(\zeta)$ は解析接続により $\overline{\phi(\zeta)}$ を用いて表すことができる。

$$\phi(\zeta) = -\overline{\phi(1/\overline{\zeta})} - \frac{\overline{\omega(1/\overline{\zeta})}}{\omega'(\zeta)} \phi'(\zeta) \quad ⑤$$

ここで、 $\phi(\zeta)$ 、 $\overline{\phi(\zeta)}$ を *dislocation* を有する関数^[1,2]を用いて、

$$\phi(\zeta) = A \log \zeta + \phi_2(\zeta), \quad \overline{\phi(\zeta)} = \overline{A} \log \zeta + \overline{\phi_2(\zeta)} \quad \left(A = \frac{\alpha_0 q G R}{2k} E_0 \left(\sum_{k=1}^{2k} E_k e^{-i\zeta_k} + \overline{E_0} e^{i\zeta} - E_{2k} e^{-i\zeta} \right) \right) \quad ⑥$$

と表すことにより、Riemann-Hilbert問題に帰着し、②、③式左辺を $H(\zeta)$ で表すと、 $\phi_2(\zeta)$ の解は次の形で得られる。

$$\phi_2(\zeta) = \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_{L_j + M_j} \frac{H(\sigma)}{\chi(\sigma)(\sigma - \zeta)} d\sigma - \chi(\zeta) \sum_{k=1}^{2k} \frac{(\overline{A} \zeta_k + \overline{A}_k) B_k}{\chi(\zeta_k)(\zeta_k - \zeta)} \quad ⑦$$

$$\chi(\zeta) = \prod_{j=1}^n [(\zeta - \alpha_j)^m (\zeta - \beta_j)^{1-m}] \quad \left(m = 0.5 - i \frac{\log \kappa}{2\pi}, \frac{E_k}{\omega'(\zeta_k)} \equiv B_k, 1/\overline{\zeta_k} \equiv \zeta_k' \right) \quad ⑧$$

ここに、 $\chi(\zeta)$ はPlemelj関数で、 $\zeta \rightarrow \infty$ のとき $\chi(\zeta)/\zeta \rightarrow 1$ なる分岐をとり、境界上で、

$$\chi^+(\sigma) = \chi^-(\sigma) \quad \text{on } L_j, \quad -\kappa \chi^+(\sigma) = \chi^-(\sigma) \quad \text{on } M_j \quad ⑨$$

なる性質を有する。肩添字+、-は単位円上に外側および内側から近づいたときの境界上の値を表す。

定数 $A_k \equiv \phi'(\zeta_k')$ は、いまの場合、 $24 \times 2 = 48$ 元1次の連立方程式を解いて決められる。定数 C_j は $\zeta \rightarrow \infty$ で $\phi(\zeta)$ が0になる条件、あるいは、 $\zeta \rightarrow \infty$ で応力が0になる条件を満足するように決定される。

なお、応力値を得るためには、⑦式の一次導関数が判ればよく、変位境界が2箇所の場合には、⑦式の M_j 積分は留数定理により厳密解が得られ、 L_j 積分の一次導関数は積分の中に ζ を含まない形で得られる。

【解析例】 解析結果の一例として、一様熱流が $\delta = 0^\circ$ の方向より作用し、2ヶ所で変位拘束された場合の熱応力分布図およびクラック進展に伴うクラック先端の応力拡大係数を示す。剥離先端とクラック先端で応力に特異性がみられることが判る。

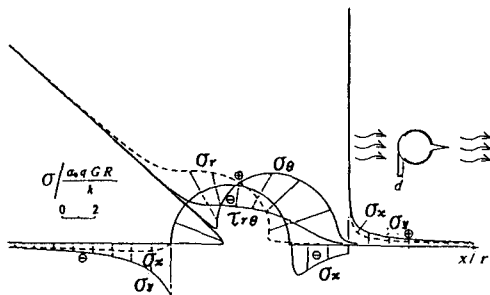


図-2 応力分布図 ($\kappa=2.0$; $l/r=1.0$; $d/r=0.25$)

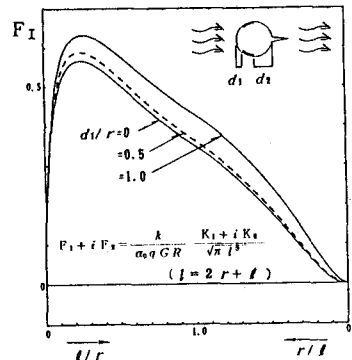


図-3 クラック先端の応力拡大係数 ($\kappa=2.0$; $d/r=1.0$)

【参考文献】 [1] Hasebe, Tamai & Nakamura, J. Engrg. Mech., ASCE, 112-1, 1986
 [2] Hasebe, Tomida & Nakamura, J. Thermal Stresses, 11, 1988
 [3] Hasebe, Tomida & Nakamura, J. Thermal Stresses, 12, 1989
 [4] Hasebe, Irikura & Nakamura, J. Appl. Mech., ASME, 58, 1991
 [5] Hasebe, Okumura & Nakamura, Int. J. Fracture, 33, 1987
 [6] Hasebe, Okumura & Nakamura, Int. J. Fracture, 32, 1987