

I-410 クラックを有する半無限体への Wedge-Shaped punch の不完全な押し込み問題

石川島播磨重工業 正 児島清隆
 名古屋工業大学 正 長谷部宣男 正 中村卓次

1. 緒言 Fig. 1に示すような弾性体への不完全な押し込みにより、接触端の一端で滑らかな接触を持つ Wedge-Shaped punch の応力解析解を導く。この問題は、punch接触部では、クーロンの摩擦則($\tau_{xy} = \mu \sigma_y$)と垂直変位が与えられ、punch接触部以外では、外力が0の境界条件が与えられる混合境界値問題の特別な場合となる。解析においては、クラックを有する半無限領域(z-plane)を単位円内部(ζ -plane)に写像する有理型写像関数 $z = \omega(\zeta)$ を用いて解析を行っている。またこの時の条件として次の条件が課せられている。1) punchは剛体である。2) 母材は2次元弾性体である。3) 摩擦則は、クーロン摩擦である。4) punch接触面での母材形状は直線である。なおpunchの両端まで完全に押し込まれた場合の解析は文献[1, 2]に報告した。

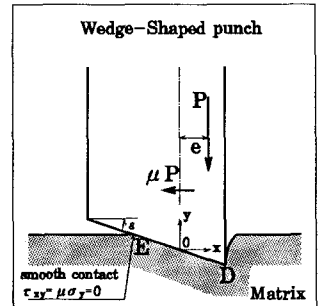


Fig.1 不完全な押し込みの Wedge-Shaped punch

2. 写像関数 Fig. 2に示すクラックを有する半平面領域を単位円内部に写像する有理型写像関数は、次の式で表される^[3]。

$$\omega(\zeta) = \frac{E_0}{1-\zeta} + \sum_k \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} + E_c \quad (1)$$

ここで、 E_c はpunch接触部の中心が座標の原点となるように決める。写像関数 $\omega(\zeta)$ が有理関数の時には、特異積分方程式を解くことなく、多元連立一次方程式を解くことによって閉じた解が得られる。

3. 解析手法 Fig. 2において境界条件は境界 \overline{ABCD} , \overline{DE} , \overline{EA} でそれぞれ次のように与えられる。

$$\begin{cases} \overline{ABCD} & \text{外力 } p_x=0, p_y=0 \\ \overline{DE} & \begin{cases} \text{外力 } p_x = \mu p_y, & -\int_D^E p_y ds = P \\ \text{変位 } v = v(z) \end{cases} \\ \overline{EA} & \text{外力 } p_x=0, p_y=0 \end{cases}$$

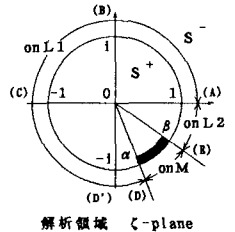
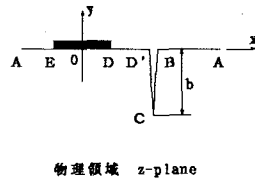


Fig.2 領域の対応と記号

Wedge-Shaped punchでは、 $v(z) = \epsilon \omega(\sigma)$ となる。ここで σ は、境界上の点で $|\sigma| = 1$ である。この境界条件を外力の境界条件式、摩擦則と垂直変位を受けるpunch接触問題の一般的な境界条件式に代入して得られる方程式は、Riemann-Hilbert問題として解かれ、最終的に複素応力関数 $\phi(\zeta)$ を次の形で得る。この解は式(1)の写像関数の係数を変えれば、任意形状の場合に適用できる。

$$\begin{aligned} \phi(\zeta) = & \frac{\chi(\zeta)}{2\pi i} \int_B^I \frac{P(1-i\mu)}{\chi(\sigma)(\sigma-\zeta)} d\sigma \\ & + \frac{4Gei(1-i\mu)}{2(\kappa+1)} \left[\omega(\zeta) - \frac{\chi(\zeta)}{\chi(1)} \frac{E_0}{1-\zeta} - \sum_k \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \frac{E_k}{\zeta_k - \zeta} \right] \\ & - \frac{1+i\mu}{2} \sum_k \frac{\overline{A_k} B_k}{\zeta_k - \zeta} - \frac{1-i\mu}{2} \sum_k \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \frac{\overline{A_k} B_k}{\zeta_k - \zeta} \\ & + \frac{1-i\mu}{2} \sum_k \frac{A_k \overline{B_k} \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} - \frac{1-i\mu}{2} \sum_k \frac{\chi(\zeta)}{\chi(\zeta_k)} \frac{A_k \overline{B_k} \zeta_k^2}{\zeta_k - \zeta} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $\zeta_k = 1/\overline{\zeta_k}$ であり、 $A_k = \phi'(\zeta_k)$, $\overline{B_k} = \frac{\overline{E_k}}{\omega'(\zeta_k)}$ となる定数である。 $\chi(\zeta)$ は、plemelj関数で次式で表される。

$$\chi(\xi) = (\xi - \alpha)^m (\xi - \beta)^{1-m}, \quad m = 0.5 - i(\ln g) / (2\pi) \quad (3)$$

ここで、 g は、摩擦係数 μ と材料定数 κ により、また、材料定数 κ は、ポアソン比 ν により、次のように表される定数である。

$$g = \frac{(\kappa + 1) - i\mu(\kappa - 1)}{(\kappa + 1) + i\mu(\kappa - 1)} \quad (4) \quad \kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu \\ (3 - \nu) / (1 + \nu) \end{cases} \begin{matrix} \text{平面ひずみ状態} \\ \text{一般化平面応力状態} \end{matrix} \quad (5)$$

また、 α 、 β はpunch接触端の点に対応する単位円上の点である (Fig. 2参照)。 $\phi(\xi)$ の第1項と第2項は、押し込み荷重 P による項とパンチ接触面の傾き $G\varepsilon$ による項を表し、第3項以降の A_k 、 $\overline{B_k}$ に関連する項はクラックの存在によって現れる項である。クラックがない場合には、写像関数 $\omega(\xi)$ で E_k の項を0とすればよいので応力関数 $\phi(\xi)$ は次のようになる。

$$\phi(\xi) = \frac{\chi(\xi)}{2\pi i} \int_{\beta}^{\alpha} \frac{P(1-i\mu)}{\chi(\sigma)(\sigma-\xi)} d\sigma + \frac{4G\varepsilon i(1-i\mu)}{2(\kappa+1)} \left[\omega(\xi) - \frac{\chi(\xi)}{\chi(1)} \frac{E_0}{1-\xi} \right] \quad (6)$$

不完全な押し込みの Wedge-Shaped punch では、wedgeの1つの接触端 (Fig. 1ではE点) で滑らかな接触をもつことからもう1つの境界条件が得られる。

$$E \text{点において } \omega(\beta)(\sigma_y - i\tau_{xy}) = \{\phi^+(\beta) - \phi^-(\beta)\} = 0 \quad (7)$$

$\phi^+(\sigma)$ は境界 $\xi = \sigma$ に領域 S^+ から近づいたときの $\phi(\sigma)$ の値、 $\phi^-(\sigma)$ は領域 S^- から近づいたときの $\phi(\sigma)$ の値である。この条件よりpunch押し込み荷重 P とpunch接触面の傾き $G\varepsilon$ との間に次の関係式が得られる。

$$P = \frac{\alpha - \beta}{1 - \alpha} (1 - m) \left\{ -\frac{4\pi G\varepsilon}{\kappa + 1} \left(\frac{E_0}{1 - \beta} + \sum_k \frac{\chi(1)E_k}{\chi(\xi_k)(\xi_k - \beta)} \right) + i\pi\chi(1) \left(\sum_k \frac{\overline{A_k}B_k}{\chi(\xi_k)(\xi_k - \beta)} + \sum_k \frac{A_k\overline{B_k}\xi_k^2}{\chi(\xi_k)(\xi_k - \beta)} \right) \right\} \quad (8)$$

クラックのない場合は、punch接触部の長さを $2l = \omega(\alpha) - \omega(\beta)$ として次式のようになる。これは文献[4]と一致する。

$$P = \frac{-8\pi G\varepsilon(1-m)}{\kappa + 1} l \quad (9)$$

また、punchには原点 (punch接触部の中心) に関して次式で表される合モーメントが働く^[5]。

$$M_R = Re \left\{ \int_{\mu} \overline{\omega(\sigma)} f(\sigma) \chi(\sigma) d\sigma \right\} \quad (10)$$

ここで、 $Re\{\}$ は、括弧 $\{\}$ の中の実部をとることを意味する。このときpunch接触面に生じる合モーメント M_R は偏心モーメント $P e$ に等しい。

このことからpunch接触面を e に保つのに必要な偏心量 e を求めることができる。

4. 解析結果

解析結果として応力分布例をFig. 3, 4に示す。

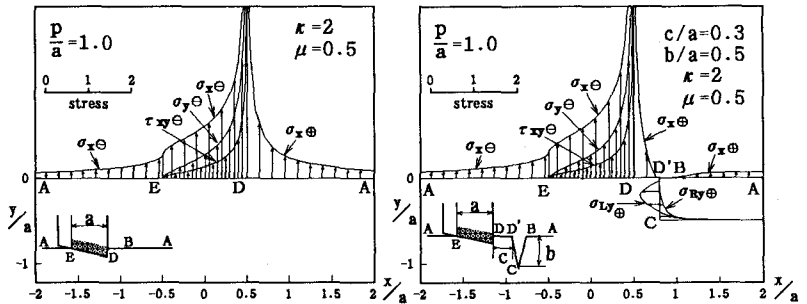


Fig.3 応力分布(クラックのない場合) $b/a=0$
 $\kappa=2, \mu=0.5 \quad G\varepsilon=-0.43204$

Fig.4 応力分布(クラックのある場合) $b/a=0.5$
 $c/a=0.3, \kappa=2, \mu=0.5, G\varepsilon=-0.42519$

5. 参考文献

[1]Hasebe et al., J. Engrg. Mech., ASCE, 115(6), 1989, 1137-1149.
 [2]Okumura et al., J. Engrg. Mech., ASCE, 116(10), 1990, 2173-2185.
 [3]Hasebe & Inohara, Ing. Arch., 49, 1980, 51-62.
 [4]England, A. H, Complex Variable Methods in Elasticity, John Wiley and Sons, 1971, U. K.
 [5]Muskhelishvili, Some Basic Problem of Mathematical Theory of Elasticity, Noordhoff, 1963, The Netherlands.