

北見工業大学 正員 奥村 勇
北海道開発コンサルタント 正員 長井智典

1. まえがき 最近の3次元弾性問題に関する研究は、異方性体のそれに向うようになった。異方性体には、種々の部類があるが、実用的見地から、直交異方性体と横等方性体とが主に取扱われている。直交異方性体に関する3次元弾性問題は、最近でも、あまり見当たらないようであるが、横等方性体については、直方柱、円柱或は円筒の軸対称問題が幅広く研究されている。然しながら、短円柱或は短円筒の非軸対称問題に関する研究は、現在でも、あまり見受けられないようである。

本研究は、一般化されたElliottの解により、両端面に部分的圧力を受ける横等方性短円柱の非軸対称応力解析を行うものである。境界条件は、両端面に二つの扇形部分分布荷重が作用し、側面が自由の場合を考える。数値計算においては、横等方性材料の一例として、マグネシウム結晶およびカドミウム結晶が取扱われ、横等方性材料の応力特性が明らかにされている。また、厳密な等方性材料との比較を行い、変位および応力に及ぼす異方性の効果が調べられている。

2. 一般化されたElliottの解 円柱座標 (r, θ, z) における一般化されたElliottの解は、変位成分を u_r, u_θ, u_z および弾性定数を C_{ij} と表すと、次のように表される。

$$u_r = \frac{\partial}{\partial r} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta},$$

$$u_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\phi_{01} + \phi_{03} + \gamma_1 \left(r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) - \gamma_2 \phi_1 - \gamma_3 \phi_3 \right] - \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

$$u_z = \frac{\partial}{\partial z} \left[k_1 (\phi_{01} - \gamma_3 \phi_1) + k_2 (\phi_{03} - \gamma_2 \phi_3) + \gamma_1 \left(k_1 r \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + k_2 z \frac{\partial \phi_3}{\partial z} \right) \right] \quad (1)$$

ここで、

$$\nabla_1^2 \phi_{01} + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_{01}}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_{03} + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_{03}}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \phi_1 + \nu_2 \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial z^2} = 0$$

$$\nabla_1^2 \phi_3 + \nu_1 \frac{\partial^2 \phi_3}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 \psi + \nu_3 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \quad \nabla_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2)$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} 1 & [\nu_1 = \nu_2] \\ 0 & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} \frac{2C_{11}\nu_2}{C_{11}\nu_2 - C_{44}} & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \frac{C_{11}\nu_1 - C_{44}}{C_{11}\nu_2 - C_{44}} & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases}$$

$$\gamma_3 = \begin{cases} 0 & [\nu_1 = \nu_2] \\ \frac{2\nu_2}{\nu_1 - \nu_2} & [\nu_1 \neq \nu_2] \end{cases} \quad (3)$$

$$k_1 = \frac{C_{11}\nu_1 - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}, \quad k_2 = \frac{C_{11}\nu_2 - C_{44}}{C_{13} + C_{44}}, \quad \nu_3 = \frac{C_{44}}{C_{66}} = \frac{2C_{44}}{C_{11} - C_{12}} \quad (4)$$

また、 ν_1 および ν_2 は、次式に示す2次方程式の二つの根である。

$$C_{11}C_{44}\nu^2 + [C_{13}(C_{13} + 2C_{44}) - C_{11}C_{33}]\nu + C_{33}C_{44} = 0 \quad (5)$$

図-1に示すように、短円柱の応力場が、 z に関して偶である問題を考えて、変位ポテンシャルは、式(2)から、次のように求められる。

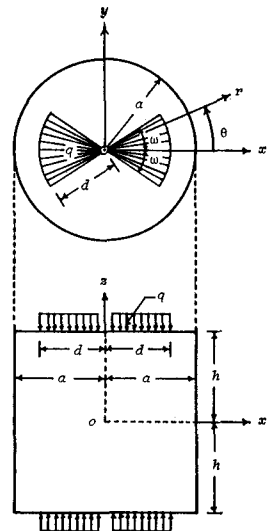


Fig.1 Coordinate system of short cylinder.

$$\begin{aligned} \phi_{03} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{\nu_2}}, \\ \phi_{01} &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} D_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\sqrt{\nu_1} \beta_n r), \\ \phi_3 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{ms} \cos m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{\nu_1}}, \\ \phi_1 &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{mn} \cos m\theta \cos \beta_n z I_m(\sqrt{\nu_2} \beta_n r), \\ \psi &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} B_{ms} \sin m\theta J_m(\alpha_{ms} r) \cosh \frac{\alpha_{ms} z}{\sqrt{\nu_3}} + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{mn} \\ &\quad \times \sin m\theta \cos \beta_n z I_m(\sqrt{\nu_3} \beta_n r) \end{aligned} \quad (6)$$

ここで、 $\alpha_{ms} = \lambda_{ms}/a$ 、 $\beta_n = n\pi/h$ であり、 A_{ms}, \dots, E_{mn} は、境界条件から定められる未定数である。また、側面の境界条件から、 λ_{ms} は、 $J'_m(\lambda_{ms}) = 0$ の根とするのが好都合であり、 $\alpha_{ms} = 0$ および $\beta_n = 0$ に対応した付加解も必要となる。

3. 境界条件 短円柱の側面は、自由とし、両端面に二つの扇形部分圧力を受ける場合を考えると、境界条件は、次式となる。

$$r = a \text{ において、 } \sigma_{rr} = 0, \sigma_{r\theta} = 0, \sigma_{rz} = 0 \quad (7)$$

$$z = \pm h \text{ において、 } \sigma_{zr} = 0, \sigma_{z\theta} = 0, \sigma_{zz} = -p(r, \theta) \quad (8)$$

ここで、 $p(r, \theta)$ は、図-1に示した端面の圧力である。

4. 計算結果 数値計算は、マグネシウム結晶、カドミウム結晶或はポアソン比 $\nu = 0.25$ の厳密な等方性材料で作られた、 $h/a = 1.0, d/h = 0.3$ および $\omega = \pi/8$ を持つ短円柱について行った。表1および表2には、三つの材料における変位および応力の値の比較を示した。カドミウム結晶の値が等方性材料のそれらに比べて大きく相異している。図-2から図-4に、マグネシウム結晶の応力分布を示した。

Table 1 Comparison of displacement values
($r=0.2a, \theta=\pi/16, z=0.8a$).

Material	$u_r / \frac{qa}{\sigma_{11}}$	$u_\theta / \frac{qa}{\sigma_{11}}$	$u_z / \frac{qa}{\sigma_{11}}$
Magnesium	0.0048	0.0039	-0.1061
Cadmium	0.0164	0.0063	-0.2428
Isotropy	0.0042	0.0036	-0.0980

Table 2 Comparison of stress values
($r=0.1a, \theta=0, z=0.8a$).

Material	σ_{rr}/q	$\sigma_{\theta\theta}/q$	σ_{zz}/q	σ_{zr}/q
Magnesium	-0.0413	0.0166	-0.2749	-0.0330
Cadmium	-0.1030	0.0071	-0.2176	-0.0168
Isotropy	-0.0470	0.0170	-0.2603	-0.0311

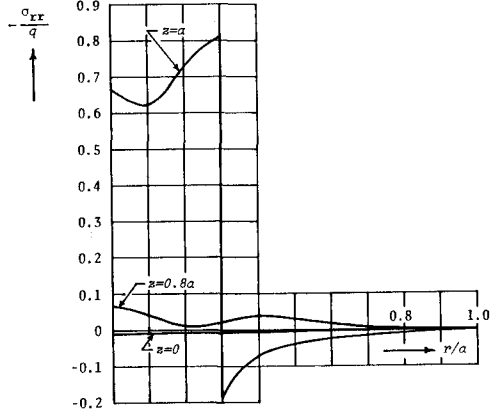


Fig.2 Distribution of σ_{rr} (Magnesium, $\theta=0$).

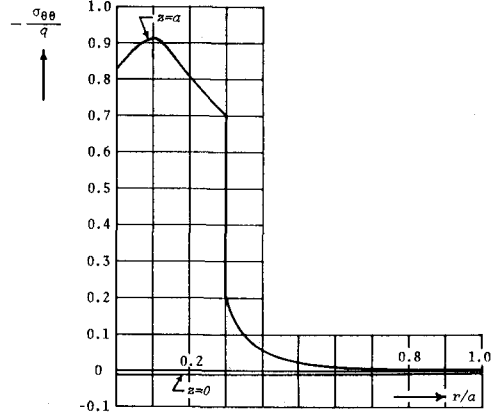


Fig.3 Distribution of $\sigma_{\theta\theta}$ (Magnesium, $\theta=0$).

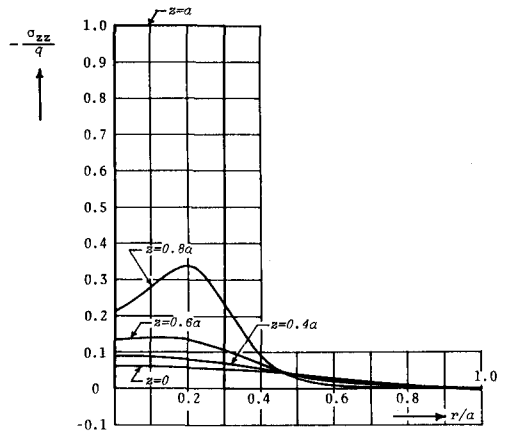


Fig.4 Distribution of σ_{zz} (Magnesium, $\theta=0$).