

I-388

仮想境界積分法による形状決定逆問題の解析

大成建設 正員 大野慎也  
福井大学工学部 正員 福井卓雄

1. はじめに

材料中に波を入射・伝播させて、材料内に存在する欠陥から生ずる散乱波を観測し、その散乱波の特性から欠陥の形状を推定する理論的手法について考察する。ここであつかう問題は散乱体の形状を決定する逆問題であり、数量的非破壊評価における基本課題である。<sup>(1)</sup>

物体中に何らかの欠陥が存在すると、外部から入射した波はその欠陥によって散乱する。欠陥が存在しなければ散乱はないはずだから、このような散乱波には欠陥に関するなんらかの情報が含まれているはずである。この情報を使って欠陥の形状を決定することがいまの問題である。ここでは、無限媒体中に散乱体(欠陥)が存在するときに、遠方で得た散乱波のデータをもとに散乱体の形状を推定する問題を考える。散乱体のおよその位置とその特性(境界条件)は既知であるとし、散乱体の形状を推定するだけの問題を考えることにする。散乱波は散乱体から十分に離れたところで観測されるとする。すなわち、遠方散乱場(散乱振幅)のデータが得られているものとする。

2. 形状決定逆問題とその解析法

ここでは問題を次のように定義する(図1参照)。無限媒体中に散乱体が一個あるとし、その境界を  $B$  とする。入射波  $u^i$  を受けて散乱体表面  $B$  より散乱波  $u^s$  が生じる。散乱体より十分にはなれた球面(円周)  $S$  上で観測される散乱波は散乱振幅  $f(\theta)$  により球面までの距離  $a$  を消去した形で表わされる。すなわち、散乱振幅は散乱波の伝播の方向特性を表わすものである。これにより散乱体近傍での散乱波を再現し、想定される境界条件を満足するように境界  $B$  の形状を決定するのである。ここで注意すべきことは、散乱振幅そのものは散乱体からの距離に無関係な量なので、必ずしも観測を球面  $S$  上で行なう必要はないことである。また、遠方散乱場は解析的であるので、一部の情報が欠落していたとしても散乱振幅データの補間は可能である。

2次元空間におけるスカラー波動問題について考えよう。支配方程式は Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 u + ku = 0 \tag{1}$$

である。ここに、 $k$  は波数である。全波動  $u$  は入射波  $u^i$  と散乱波  $u^s$  との和  $u = u^i + u^s$  である。領域は外部であるので散乱波  $u^s$  は放射条件

$$\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right) \quad r \rightarrow \infty \tag{2}$$

を満足しなければならない。

散乱波を表現するために、散乱体内部に仮想境界  $S_0$  を考え、その上に分布した密度  $\sigma$  による一重層ポテンシャルを考えると、支配方程式(1)と放射条件(2)を満足する散乱波は

$$u^s(\mathbf{x}) = \int_{S_0} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) \sigma(\mathbf{y}) ds(\mathbf{y}) \tag{3}$$

と表わせる。ここに、 $H_n^{(1)}$  は  $n$  次第一種の Hankel 関数である。いま、仮想境界を半径  $b$  の円周とすると、(3)を極座標上の固有関数を使って書きなおすことができる。<sup>(2)</sup> すなわち、積分核は

$$\frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{x}-\mathbf{y}|) = \frac{i}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos n(\theta-\theta_y) J_n(kb) H_n^{(1)}(kr) \tag{4}$$

であり、密度  $\sigma$  は Fourier 級数

$$\sigma(\mathbf{y}) = \frac{\tilde{A}_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \tilde{A}_m \cos m\theta_y + \tilde{B}_m \sin m\theta_y \right] \tag{5}$$

で表現できる。ここに、 $\varepsilon_n$  は Neumann の記号 ( $n=0$  で 1, その他のとき 2),  $J_n$  は  $n$  次の Bessel 関数である。また、

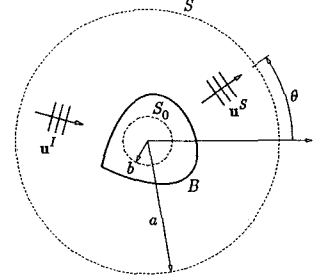


図1. 形状決定逆散乱問題

点  $x, y$  の極座標を  $(r, \theta), (b, \theta_y)$  と表記した. (4) および (5) を (3) に代入すれば, 散乱波の固有関数展開式

$$u^S(x) = \frac{i\pi}{2} \left[ \frac{A_0}{2} H_0^{(1)}(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right\} H_n^{(1)}(kr) \right] \quad (6)$$

が得られる. ここで, 係数は  $A_n = \bar{A}_n b J_n(kb), B_n = \bar{B}_n b J_n(kb)$  である. 問題は, 散乱振幅データから未知係数  $A_n, B_n$  を決定し, (6) により散乱体近傍の散乱場を再現することに帰着される.

放射条件 (2) により, 遠方散乱場は, 散乱振幅  $f(\theta)$  を用いて

$$u^S(x) = \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left[ f(\theta) + O\left(\frac{1}{r}\right) \right] \quad r \rightarrow \infty \quad (7)$$

のように表わされる. 一方, 固有関数展開式 (6) において,  $r \rightarrow \infty$  とすると, Hankel 関数の性質より

$$u^S(x) \sim i \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{n\pi}{2}} \left\{ A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right\} \right] \quad (8)$$

となる. (7) と (8) とを比較すると, 散乱振幅  $f(\theta)$  は

$$f(\theta) = i \sqrt{\frac{\pi}{2k}} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left[ \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-i\frac{n\pi}{2}} \left\{ A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta \right\} \right] \quad (9)$$

と表される. すなわち, 散乱振幅が与えられれば, 一重層ポテンシャルの場を規定する (6) の未知係数は

$$A_n = \frac{C}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta, \quad B_n = \frac{C}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta, \quad C \equiv -i \sqrt{\frac{2k}{\pi}} e^{i\frac{(2n+1)\pi}{4}} \quad (10)$$

という形で  $f(\theta)$  の Fourier 係数として求まる.

ひとたび散乱体近傍の散乱場が決定されれば, 散乱体の形状を探索することが可能となる. 例えば, 柔らかい散乱体の場合であれば, 境界条件  $u=0$  が満足される位置が散乱体の境界となるので,  $|u|^2 = |u^I + u^S|^2$  を最小とするような位置を探索すれば, 境界を決定することができる. また, 硬い散乱体の場合には, 境界条件  $\partial u / \partial n = 0$  を満足する境界を, 勾配の場から決定することになる.

### 3. 簡単な数値例

柔らかい散乱体の例を挙げる. 境界形状は楕円である. 散乱振幅は境界要素法により算出したものを用いた. 図 2 に, (a) 散乱体周辺の波動場 (境界要素法による解), (b) 同じ領域の推定された波動場, (c) 推定形状, を示す. 波は左から水平方向に入射している. 散乱場の推定には (6) 式の  $n=12$  までを用いた. (a), (b) の波動場はよく一致しており, (c) の推定形状も, 入射波に対して裏側の部分がゆがんでいるものの, ほぼもとの形状を再現している.

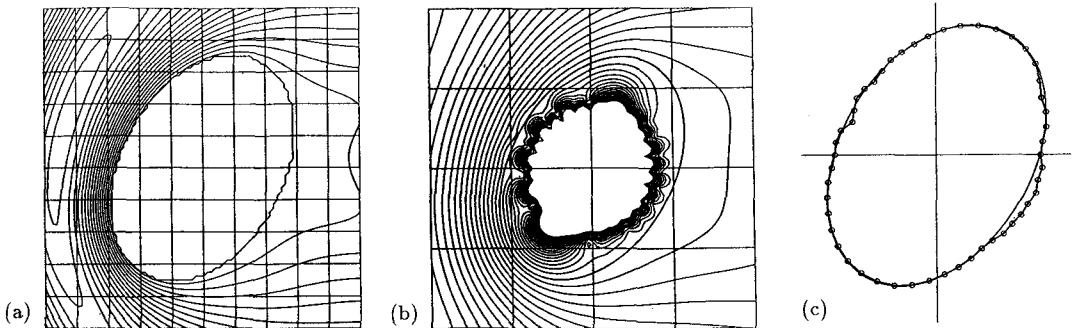


図 2. 楕円形散乱体周辺の波動場と推定形状: 長径は 1.5, 短径は 1,  $k=1$ .

#### 参考文献

- (1) 西村直志, 廣瀬壯一 (1991), 逆問題と非破壊検査, 構造工学論文集, 37A, 425-434.
- (2) Shaw, R.P. and S.C. Huang (1989), Element and eigenfunction expansion forms for an embedding integral equation approach to acoustics, *Advances in Boundary Elements*, eds. C.A. Brebbia and J.J. Connor, Vol.2 Field and Fluid Flow Solutions, 319-339, Springer-Verlag.