I-373　スロッシング問題における境界要素解の挙動

新潟大学大学院　学生員　神尾　忠弘
新潟大学工学部　正会員　阿部　和久

1．はじめに　スロッシング問題や自由水面波動問題では、水面形状が未知量となる。そのため、境界の離散化のみを必要とする境界要素法が有力な解析手法となり、多くの解析例によりその有効性が示されて来ている[1)]。本研究では、境界要素法をスロッシング解析に適用する際の解析精度など、解が有する基本的特性について調べる。

2．線形スロッシング解析　液体を非回転、非圧縮性完全流体とすると、微小振幅水面波動問題は自由水面Γ_fおよび壁面Γ_wで囲まれた流体に対し次式で与えられる。

支配方程式　$\Delta\Phi=0$　(in Ω)　(1)

境界条件　$\dot{\Phi}=-g\eta$　(2)，　$\dot{\eta}=\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=q$　(3)　(on Γ_f)，　$\dfrac{\partial\Phi}{\partial n}=q=\bar{q}$　(on Γ_w)　(4)

ここでΦは速度ポテンシャル、ηは水面形状、gは重力加速度、Δはラプラシアン、$(\dot{\ })$は∂/∂tである。式(1)の支配方程式を満たす解を次の境界要素方程式より構成する。

$$[H]\{\Phi\}=[G]\{q\} \qquad (5)$$

ここで[H],[G]は係数行列、{Φ},{q}は節点境界値ベクトルである。

3．離散化と解析精度　境界要素解析の基本的特性を調べるため、自由振動問題($\bar{q}=0$　on Γ_w)について考えると、Γ_f上の{Φ}と{q}について次式を得る。

$$\{q\}=[A]\{\Phi\} \qquad (6)$$

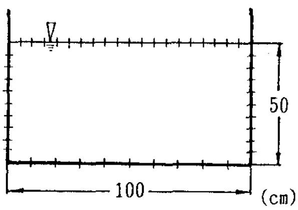

図-1　解析モデル

ここで[A]は式(5)の[H],[G]より得られる行列である。

式(6)を式(3)に用いると次の連立常微分方程式を得る。

$$\{\dot{\Phi}\}=-g\{\eta\}\quad,\quad\{\dot{\eta}\}=[A]\{\Phi\}\quad \text{or}\quad \{\ddot{\Phi}\}=-g[A]\{\Phi\} \qquad (7)$$

ここで一般に[A]は非対称密行列であるが、領域内で定義された速度ポテンシャルで表わした運動エネルギーが非負であることより、[A]は(半)正定値行列であり、固有値は非負であることがわかる。そこで[A]の正の固有値を$\bar{\lambda}_i$、対応する固有ベクトルを$\{\bar{\Phi}_i\}$とし、Γ_f上のポテンシャル{Φ}を各モードの一次結合で定義すると、式(7)より各モードに対し次式を得る。

$$\{\Phi\}=\Sigma a_i\{\bar{\Phi}_i\}\quad,\quad \ddot{a}_i=-\bar{\omega}_i^2 a_i \quad (\bar{\omega}_i^2=g\bar{\lambda}_i) \qquad (8)$$

上述のように固有ベクトルは非負であり、したがって境界要素による空間方向の離散化に際し、解は数値的減衰を生ずることはなく、また式(8)のように解の基本的特性は各モードごとに議論し得る。そこで、空間方向の離散化が解析精度に及ぼす影響を図-1に示す問題を対象に、$\bar{\lambda}_i\{\bar{\Phi}_i\}$とそれに対する真値$\lambda_i\{\Phi_i\}$との差のノルムに基づいて調べた。なお、離散化に関して、一定要素を用いた場合(case1)、一次要素を用いた場合(case2)、および一定要素を用い、かつ自由水面上では流束に関する境界積分方程式を離散化した場合(case3)の３ケースを対象とした。結果を図-2に示す。図-2において横軸は要素長hを波長Lで割った値である。なお、他の分割数に対する結果も、h/Lによる規格化で本結果とほぼ一致

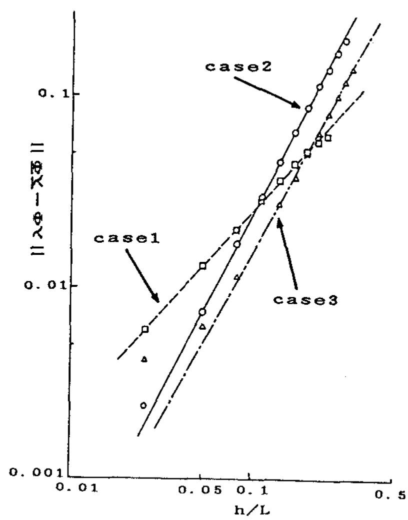

図-2　空間方向への離散化と精度との関係

し、したがって解の精度が概ねh/Lに基づき議論し得ることがわかった。また、図より、case2,3の収束次数がほぼ等しく、混合型の積分方程式を用いることで、一定要素でも一次要素と同等の精度が期待できることがわかる。

4.一定要素による非線形スロッシング解析　有限振幅の解析では、水面形状を未知量とする場合にも、また流体粒子をLagrange的に追跡する場合においても領域の幾何形状が逐次更新される。一定要素では節点が要素中央に位置するが、水面形の決定には要素端点の運動解析が不可欠となるため、ポテンシャルや流束に対して、節点と要素端点間での配分操作が必要となる。ここでは、非線形解析におけるこの操作が精度等に及ぼす影響を調べる目的で、線形問題に基づき基礎的考察を行なう。

配分操作は境界要素方程式より求めたΓ_f上の節点流束値{q}を要素端点での値$\{\hat{q}\}$に変換する際と、要素端ポテンシャル$\{\hat{\Phi}\}$より節点値{Φ}を求める際に必要となる。各変換に関する行列をそれぞれ[C],[B]とすると、要素端ポテンシャル$\{\hat{\Phi}\}$に対して次の連立常微分方程式を得る。

$$\{\ddot{\hat{\Phi}}\}=-g[\hat{A}]\{\hat{\Phi}\} \quad , \quad [\hat{A}]=[C][A][B] \qquad (9)$$

図-1で、自由表面を10等分割した場合に対し$[\hat{A}]$の各モードの固有振動数$\hat{\omega}_i$を求め、波数を横軸にとりプロットした結果を図-3に示す。なお、図中には対応する波数における真の固有振動数ω_iも併せて示した。図より、高次モードでの振動数が大幅に減少し精度が著しく低下していることがわかる。また、低振動数下において、物理的に存在し得ない波長の短い振動モードが発生する可能性がある。そこで図中に示した7番目のモードに対する振動数ω=6.000044681の下で水平加速度を与えた場合の応答を実際に解析した。なお、この振動数は1次と2次の固有振動数の間に位置している。400-800stepにおける自由水面形状を図-4に示す。図中には(a)節点値に基づいたもの、(b)配分操作を伴うもの、の各ケースを示した。図より時間の経過と共に、(a)には認められない短波長のモードが(b)の応答において次第に卓越して行く様子が確認できる。実際の非線形解析では、ステップ毎に係数行列が更新されるので、このような応答が顕著に現われるとは限らないが、位相の大幅なずれや、解の安定性に影響を及ぼす可能性等があり、一定要素による非線形波動解析は注意を要することがわかる。

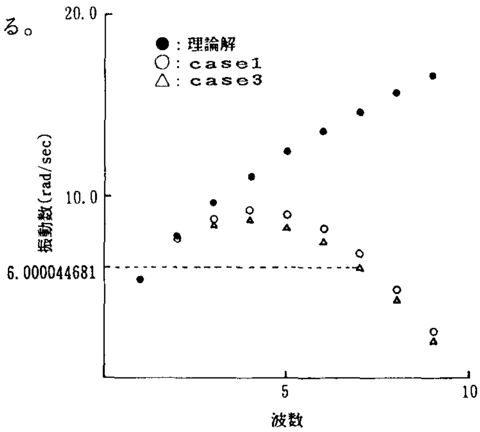

図-3　配分操作が精度に及ぼす影響

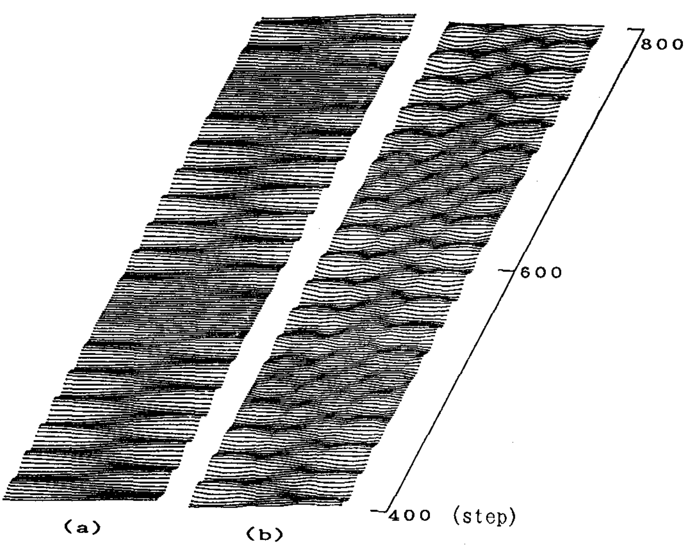

図-4　液面形状の時刻歴応答

<参考文献>1)Nakayama,T. and Washizu,K.:The boundary element method applied to the analysis of two-dimensional nonlinear sloshing problems, Int.J.Num.Meth.Eng, 17, pp.1631-1646(1981).