I-372　境界積分方程式法による矩形平板の曲げ応力解析

岩手大学工学部　正　員　出戸　秀明　岩崎　正二　宮本　裕
学生員　玉内　秀佳
福　島　県　庁　　　渡辺　文武

１．はじめに

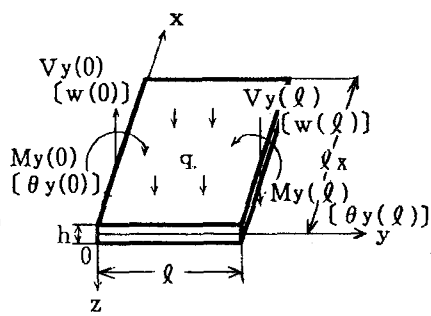
矩形平板の曲げ問題の解法の一つとして有限帯板法による解法があるが、この解法の特徴は帯板要素の長手方向端部境界条件を満足する級数解を変位関数として採用するところにあり、残った方向に対して有限要素法の離散化手法を適用するので半解析的有限要素法と呼ばれている。本論文では上に述べた有限帯板法の考え方に境界積分方程式の手法を組み合わせることにより矩形平板の曲げ問題を解析しようとするものでこのような方法は、堀部[1]によって提案されたものであり境界帯板法[2]と名付けている。すなわち、たわみの変位関数として一方向の境界条件を満足する級数解を用いて平板の支配微分方程式を一次元問題に還元し、残りの方向に対して境界積分方程式法に基づく定式化を行なうものである。

２．解析理論

直交異方性平板の曲げ問題の支配微分方程式は、式(１)のように表わすことができる。ただし、wは平板のたわみ、qは単位面積当りの荷重とする。

$$D_x \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_y \frac{\partial^4 w(x,y)}{\partial y^4} = q(x,y) \qquad (1)$$

ここで、Dx，Dy，Hは直交異方性パラメータである。図－１のように座標軸を定め、長さがℓ_x，ℓの矩形平板を考える。また、対辺単純支持を仮定するとたわみと分布荷重は以下のように展開することができる。ただし、Q_nは荷重状態によって変わる係数である。



図－１　直交異方性矩形平板

$$w(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(y) \sin(\alpha_n x) \ , \qquad q(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} q(y) Q_n \sin(\alpha_n x) \qquad (2)$$

ただし、$\alpha_n = n\pi/\ell_x$ ，$n = 1,2,3,\cdots$

式(２)を式(１)に代入すると支配微分方程式は一次元の問題となる。

$$D_y \frac{\partial^4 w_n(y)}{\partial y^4} - 2H\alpha_n^2 \frac{\partial^2 w_n(y)}{\partial y^2} + D_x \alpha_n^4 w_n(y) = q(y) Q_n \qquad (3)$$

式(３)の両辺に基本解$w^*(y,\xi)$をかけ、ｙ方向の全長ℓにわたって積分する。

$$\int_0^{\ell} \left[D_y \frac{\partial^4 w_n(y)}{\partial y^4} - 2H\alpha_n \frac{\partial^2 w_n(y)}{\partial y^2} + D_x \alpha_n^4 w_n(y)\right] w^*(y,\xi)\,dy = \int_0^{\ell} q(y) Q_n w^*(y,\xi)\,dy \qquad (4)$$

上式に部分積分を繰り返すと

$$Q_n w_n(\xi) = \left[V_n(y) w^*(y,\xi)\right]_{y=0}^{y=\ell} - \left[M_n(y)\theta^*(y,\xi)\right]_{y=0}^{y=\ell} + \left[\theta_n(y) M^*(y,\xi)\right]_{y=0}^{y=\ell} - \left[w_n(y) V^*(y,\xi)\right]_{y=0}^{y=\ell} + \int_0^{\ell} q(y) Q_n w^*(y,\xi)\,dy \qquad (5)$$

ただし、$\theta_n(y) = \frac{\partial w_n(y)}{\partial y}$ ，$M_n(y) = D_1 \alpha_n^2 w_n(y) - D_y \frac{\partial^2 w_n(y)}{\partial y^2}$ ，$D_1 = \nu_x D_y$、

$$V_n(y) = -D_y \frac{\partial^3 w_n(y)}{\partial y^3} + (H + 2D_{xy})\,\alpha_n^2 \frac{\partial w_n(y)}{\partial y}$$

ここで、基本解$w^*(y,\xi)$は、以下の式の解である。

$$Dy\frac{\partial^4 w^*(y,\xi)}{\partial y^4}-2H\alpha_n^2\frac{\partial^2 w^*(y,\xi)}{\partial y^2}+Dx\alpha_n^4 w^*(y,\xi)=Q_n\delta(y,\xi)$$

ただし、$\delta(y,\xi)$はデルタ関数。

基本解は、係数Dx，Dy，Hの相互関係より次のように分類される。また、$\theta^*(y,\xi)$，$M^*(y,\xi)$，$V^*(y,\xi)$，λ_1，λ_2，λ_3，α，βの内容については省略する。

①$H^2>DxDy$　　$w^*(y,\xi)=\frac{Q_n}{2(\lambda_1^2-\lambda_2^2)Dy}(\sinh\lambda_1|y-\xi|/\lambda_1-\sinh\lambda_2|y-\xi|/\lambda_2)$

②$H^2=DxDy$　　$w^*(y,\xi)=-\frac{Q_n}{4\lambda^3 Dy}(\sinh\lambda|y-\xi|-\lambda|y-\xi|\cdot\cosh\lambda|y-\xi|)$

③$H^2<DxDy$　　$w^*(y,\xi)=\frac{Q_n}{4\alpha\beta(\alpha^2+\beta^2)Dy}(\alpha\cosh\alpha|y-\xi|\cdot\sin\beta|y-\xi|$
$-\beta\sinh\alpha|y-\xi|\cdot\cos\beta|y-\xi|)$

式(５)、及び式(５)をξについて偏微分して得られる式において$\xi\to 0+\varepsilon$、$\xi\to\ell-\varepsilon$としたときのε（微少な正定数）→０の極限を考えることにより、４本の方程式が得られる。これらの式の８個の境界未知量のうち４個については両端の境界条件より定まり、残り４個の未知量は４行４列のマトリックス方程式を解くことにより求めることができる。

３．数値計算例

先に述べた解析方法に基づいて計算プログラムを作成し、いくつかの例題を解析した。表－１は、等分布荷重ｑを受ける四辺支持等方向性矩形平板の中央のたわみ、表－２は等分布荷重ｑを受ける四辺支持直交異方性矩形平板の中央のたわみのたわみの解析結果である。なお、$\ell_x=100$cm、板厚10cmとしており、ν_x、ν_yはｘ、ｙ方向のポアソン比、ｎは級数の項数であり、また、表中には級数解析法による解析解も示してある。

表－１　等分布荷重ｑを受ける四辺支持等方性矩形平板の中央のたわみ

$w=a(q\ell_x^4/Dx)$　　$[\nu_x=\nu_y=0.3]$

ℓ/ℓ_x	a		
	n=1	n=5	Exact
1.0	0.0041094	0.0040622	0.0040624
2.0	0.0101788	0.0101293	0.0101287
5.0	0.0130211	0.0129668	0.0129709

表－２　等分布荷重ｑを受ける四辺支持直交異方性矩形平板の中央のたわみ

$w=a(q\ell_x^4/Dx)$　　$[\nu_x=0.3,\nu_y=0.1]$

ℓ/ℓ_x	a		
	n=1	n=5	Exact
1.0	0.0053833	0.0053321	0.0053358
2.0	0.0107819	0.0107819	0.0107318
5.0	0.0132935	0.0132935	0.0129759

４．あとがき

本論文では、矩形平板の曲げ問題のみを取り扱った。同様な方法により面内問題に関しても解析することができるので、今後の課題としては面内面外両作用が共存するような立体的な構造物の解析にこの手法を拡張したい。

参考文献

１）堀部忠志：境界積分方程式法による長方形板の曲げ問題の一解法、境界要素法論文集　第５巻、pp.143-148、1988
２）堀部忠志：弾性床上長方形平板の大たわみ問題の境界帯板法による解析、境界要素法論文集　第６巻、pp.217-222、1989