I-361 平面骨組部材の有限変位解析に関する一定式化

東京電機大学　理工学部　井浦雅司
東北大学　工学部　岩熊哲夫

1．はじめに　有限要素法による骨組部材の幾何学的非線形解析に関する研究はこれまで数多く発表されている。その定式化に注目すると、全Lagrangian法かUpdated－Lagrangian法が多く用いられており、また座標系に関しては空間固定座標系か移動座標系が用いられている。空間固定座標系と全Lagrangian法を用いた研究は以前から報告されており、厳密な理論も体系化されている。一方、定式化の簡便性から、移動座標系を用いた全Lagrangian法が多く用いられており、骨組の変形は剛体変形と弾性変形とに分解されている。この時、弾性変形が微小と仮定すれば、複雑な非線形理論を用いなくても精確な座標変換を行なえば大変形解析は可能となる。さて、前記した２つの方法の等価性について言えば、後者の手法において弾性変形と座標変換を厳密に扱った結果は、前者の手法において厳密な理論より得られる結果と同一であることは理論的には明らかであろう。しかしながら、有限要素法の使用を前提とするならば、その等価性は必ずしも明らかとは言えない。また、既往の研究においては、移動座標系を用いた時、幾何剛性マトリックスは常に対称になるわけでなく、bowing action の影響などを考慮しながら様々な工夫をして対称な幾何剛性マトリックスを誘導している。本研究では、移動座標系を用いた時に変形の大きさに拘らず常に幾何剛性マトリックスが対称となる手法を提案すると共に、空間固定座標系を用いる手法との等価性について考察する。

2．移動座標系による定式化　移動座標系の選定には様々な方法があるが、ここではFig.1に示す座標系x-yを用いることとする。Oran[1]によれば、幾何剛性マトリックスは以下のように誘導される。先ず、移動座標系における節点変形力$\{S\}$と節点変位$\{u\}$は$\{S\}=\{S(u)\}$と表わされ、この増分をとると、$\{\Delta S\}=[t]\{\Delta u\}$と書ける。全体座標系からみた節点力$\{F\}$と変形力$\{S\}$の関係は$\{F\}=[B]\{S\}$と表わされ、この増分をとることにより、$\{\Delta F\}=[\Delta B]\{S\}+[B]\{\Delta S\}$と求まる。ここで$[\Delta B]\{S\}=[g]\{\Delta \nu\}$と、全体座標系からみた増分変位$\{\Delta \nu\}$と移動座標系からみた増分変位$\{\Delta u\}$が$\{\Delta u\}=[B]^T\{\Delta \nu\}$と関係付けられることから，以下の式を得る。

$$\{\Delta F\}=([B][t][B]^T+[g])\ \{\Delta \nu\}=[T_G]\{\Delta \nu\} \qquad (1)$$

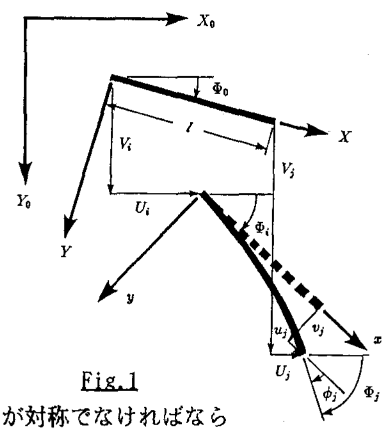

Fig.1

ここで、幾何剛性マトリックス$[T_G]$が対称である為には$[t]$と$[g]$とが対称でなければならず、これまでも、対称なマトリックス$[t]$と$[g]$を求める為の研究は数多く報告されている。

本報告では、エネルギ原理より平衡方程式と幾何剛性マトリックスを求めることとする。先ず、梁の全ポテンシャルエネルギは歪エネルギ関数Π_Sと外力のポテンシャルΠ_fとの和により$\Pi=\Pi_S+\Pi_f$と書ける。移動座標系を用いた時、Π_Sは節点変位$\{u\}$の関数として表わされ、$\Pi_S=\Pi_S(\{u\})$と書ける。幾何学的関係より全体座標系からみた節点変位$\{\nu\}$と移動座標系からみた節点変位$\{u\}$は$\{u\}=\{h(\{\nu\})\}$と表わされ、ここにhはνに関する非線形関数である。これを前式に代入すると、Π_Sは全体座標系からみた節点変位$\{\nu\}$の関数として表わされることになり、$\Pi_S=\Pi_S(\{h(\{\nu\})\})$と書ける。$\Pi_f$もまた、全体座標系からみた節点変位$\{\nu\}$の関数として表わされることから最終的に$\Pi$は$\{\nu\}$の関数となる。よって、通常の手法により、梁の平衡方程式は以下のように表わされる。

$$\{\partial\Pi / \partial \nu_m\}=0 \qquad (2)$$

ここに、ν_mは節点変位成分である。幾何剛性マトリックスは以下のように与えられる。

$$[T_G]=[\partial^2\Pi_S / \partial \nu_m \partial \nu_n] \qquad (3)$$

本手法を用いれば、歪エネルギ関数や節点変位の関係式に近似式が用いられても、最終的に得られる幾何剛性マトリックスが常に対称であることは式(3)より明らかであり、これはOranの手法と異なる点である。

3．空間固定座標系を用いる手法と移動座標系を用いる手法の等価性　前章で述べたように、平衡方程式と幾何剛性マトリックスは全ポテンシャルエネルギを微分することにより得られる。よって、移動座標系より誘導された全ポテンシャルエネルギが空間固定座標系より誘導されたものと等しければ、すなわち両者の歪が等しければ、平衡方程式と幾何剛性マトリックスは座標系の選択とは無関係に等しくなることがわかる。そこで、先ず、厳密な幾何学的関係式を用いた時に、両者の歪エネルギ関数が等しくなる条件をBernoulli-Euler梁を例にとり考察する。Bernoulli-Euler梁の歪エネルギ関数は以下のように与えられる。

$$\Pi_S=\int [EA(\varepsilon)^2+EI(\kappa)^2]/2\,dx \tag{4}$$

ここに、梁の軸方向変位を d_x，横変位を d_y とすれば、軸歪 ε と曲率 κ は以下のように書ける。

$$\varepsilon=\{(d_x'+\cos\lambda_0)^2+(d_y'+\sin\lambda_0)^2\}^{1/2}-1\text{、}\quad \kappa=\{d_y''(d_x'+\cos\lambda_0)-d_x''(d_y'+\sin\lambda_0)\}/(1+\varepsilon)^2 \tag{5}$$

ここに、λ_0 は基準座標系のX軸と棒軸とのなす角である。任意点における回転角を λ とすれば幾何学的関係より以下の式を得る。

$$(1+\varepsilon)\sin\lambda=d_y'+\sin\lambda_0,\qquad (1+\varepsilon)\cos\lambda=d_x'+\cos\lambda_0 \tag{6}$$

式(6)を用いて軸歪を書き直すと以下の式を得る。

$$\varepsilon=(d_x'+\cos\lambda_0)\cos\lambda+(d_y'+\sin\lambda_0)\sin\lambda-1 \tag{7}$$

式(5)-(7)はどの座標系においても常に成り立つ関係式である。ここで、空間固定座標系と移動座標系とに関する変位を以下のように表わす。

$$d_x=U,\quad d_y=V,\quad \lambda=\Phi,\quad \lambda_0=\Phi_0\qquad（空間固定座標系）\tag{8}$$

$$d_x=u,\quad d_y=v,\quad \lambda=\phi,\quad \lambda_0=0\qquad（移動座標系）\tag{9}$$

梁の両節点における量を下添字ｉ、ｊをつけて表わせば、幾何学的関係より以下の式を得る。

$$(L+u_j)\sin\Phi_i+v_j\cos\Phi_i=V_j-V_i+L\sin\Phi_0 \tag{10}$$

$$(L+u_j)\cos\Phi_i-v_j\sin\Phi_i=U_j-U_i+L\cos\Phi_0 \tag{11}$$

$$\phi=\Phi-\Phi_i,\qquad \phi_j=\Phi_j-\Phi_i \tag{12}$$

空間固定座標系に関する軸歪を ε_g，移動座標系に関する軸歪を ε_c とすると、式(7)、(8)、(9)より

$$\varepsilon_g=(U'+\cos\Phi_0)\cos\Phi+(V'+\sin\Phi_0)\sin\Phi-1 \tag{13}$$

$$\varepsilon_c=(u'+1)\cos\phi+v'\sin\phi-1 \tag{14}$$

を得る。式(12)を用いて式(14)を書き直すと以下の式を得る。

$$\varepsilon_c=\{(u'+1)\cos\Phi_i-v'\sin\Phi_i\}\cos\Phi+\{(u'+1)\sin\Phi_i+v'\cos\Phi_i\}\sin\Phi-1 \tag{15}$$

式(13)、(15)より軸歪が座標変換に対して不変であるための条件として以下の関係式を得る。

$$U'+\cos\Phi_0=(u'+1)\cos\Phi_i-v'\sin\Phi_i,\qquad V'+\sin\Phi_0=(u'+1)\sin\Phi_i+v'\cos\Phi_i \tag{16}$$

式(16)が成立すれば、曲率 κ も座標変換に対して不変であることが簡単に示される。よって、式(16)が成立すれば、空間固定座標系より得られる平衡方程式と幾何剛性マトリックスは、移動座標系より得られるものと全く同一であることがわかる。

さて、既往の研究においては、変位関数としてｕ，Ｕには１次関数が、ｖ，Ｖには３次関数が用いられることが多いが、その様な変位関数は式(16)を満たさないことは明らかである。また、ｕ，ｖ，Ｕ，Ｖに３次関数を用いてもその係数を決める際に幾何学的関係を乱さないように決める必要がある。ここでは、式(6)を用いて以下のように変位関数を求めている。

$$U=f_1U_i+f_2U_j+f_3\{(1+\varepsilon_i)\cos\Phi_i-\cos\Phi_0\}+f_4\{(1+\varepsilon_j)\cos\Phi_j-\cos\Phi_0\} \tag{17}$$

$$V=f_1V_i+f_2V_j+f_3\{(1+\varepsilon_i)\sin\Phi_i-\sin\Phi_0\}+f_4\{(1+\varepsilon_j)\sin\Phi_j-\sin\Phi_0\} \tag{18}$$

$$u=f_2u_j+f_3\varepsilon_i+f_4\{(1+\varepsilon_j)\cos\phi_j-1\} \tag{19}$$

$$v=f_2v_j++f_4(1+\varepsilon_j)\sin\phi_j \tag{20}$$

ここに f_1-f_4 は通常の３次関数であり、上で定義された変位関数が式(16)を満足することは明らかである。

4．おわりに　本報告で提案された手法並びに変位関数を用いる限り、厳密な幾何学的関系式を用いれば座標系の選択とは無関係に常に同一の解が得られることが明らかになった。

5．参考文献
1) Oran,C. (1973) : Journal of Structural Division, ASCE, 99(ST6), 973-985.