

有限ひずみ2次元3角形要素の一離散化展開

法政大学 学生員 日比智雄
法政大学 正会員 阿井正博

法政大学 学生員 ○平岡幹雄
東京大学 正会員 西野文雄

1. はじめに—有限ひずみ問題に対する定ひずみ要素として、B-表現、N-表現と呼ばれる変位勾配に関する総和表現のもとでの有限要素展開があるが、ここでは文献(1)にしたがった要素の全自由度を変形と剛体位置の自由度に分離する手順により、2次元3角形要素の具体的な離散化を陽な形で展開する。

2. ひずみの表現—2次元3角形要素(e)を空間直交デカルト座標{x,y}の上で考えるものとし、3節点の座標{x}(e)={(x,y)_i, (x,y)_j, (x,y)_k} (i<j<k)を要素位置とする。別に、変形後の節点i→j方向にx', それに直行する方向にy'をとり、要素座標{x',y'}とする(Fig.1)。初期状態での物質点の座標{x',y'}を、物体固定座標{ξ,η}とする。

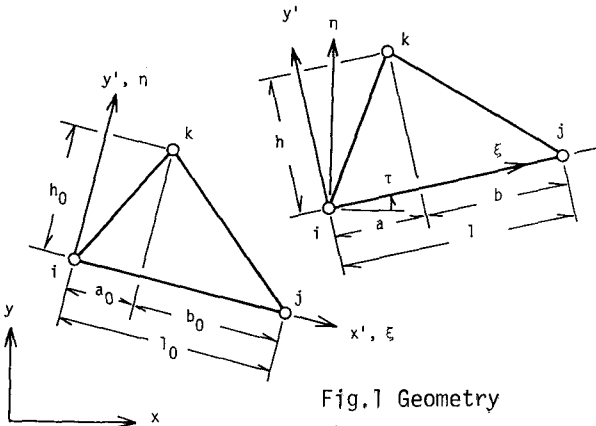


Fig.1 Geometry

要素の3角形は、節点の{x',y'}座標で定まるが、恒等的な零値を除いた

$$g(e) = \{l, a, h\}(e) \dots\dots\dots (1)$$

を要素の形状と定義する。これらの長さは要素位置{x}(e)に対して次のように定まる:

$$l = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}, \quad a = 1/l \{ \bar{x}\hat{y} + \bar{y}\hat{x} \}, \quad h = 1/l \{ \bar{x}\hat{y} - \bar{y}\hat{x} \} \quad (2, a-c)$$

ただし、 $\{\bar{x}, \bar{y}\} = \{x_j - x_i, y_j - y_i\}$, $\{\hat{x}, \hat{y}\} = \{x_k - x_i, y_k - y_i\}$ 。また、要素座標{x',y'}の回転位置は

$$\tau = \arctan(\bar{y}/\bar{x}) \dots\dots\dots (3)$$

であり、 $v(e) = \{x_i, y_i, \tau\}$ と、式(1)のg(e)は、全自由度{x}(e)の剛体位置と形状への自由度分離となる。

変形後の{x',y'}座標上でのIsoparametric補間は

$$x'(\xi, \eta) = \frac{l}{l_0} \xi + \frac{1}{h_0} \left(a - \frac{a_0 l}{l_0} \right) \eta, \quad y'(\xi, \eta) = \frac{h}{h_0} \eta \dots\dots\dots (4)$$

となり、生じるGreenのひずみ成分は

$$e_{\xi\xi} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{l}{l_0} \right)^2 - 1 \right\}, \quad e_{\eta\eta} = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{a}{h_0} - \frac{a_0 l}{h_0 l_0} \right)^2 + \left(\frac{h}{h_0} \right)^2 - 1 \right\},$$

$$\gamma_{\xi\eta} = (2e_{\xi\eta}) = \left(\frac{l}{l_0} \right) \left(\frac{a}{h_0} - \frac{a_0 l}{h_0 l_0} \right) \dots\dots\dots (5, a-c)$$

として得られ、その組e(e)={e_{ξξ}, e_{ηη}, γ_{ξη}}を要素

の変形とする。ただし、添字()₀は、初期状態値。

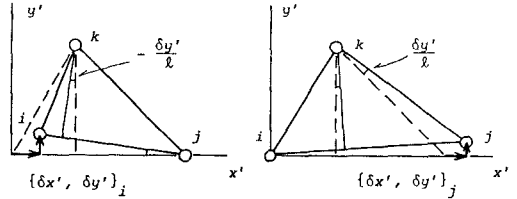


Fig.2 Rotational Effects

以上の関係式を数学的に微分すれば、変形-要素位置間の接線関係が得られるが、次のように幾何学的に分解して展開することもできる。まず、独立な微分量δ{x}(e)を要素座標方向に変換δ{x'}(e)=[T(τ)](e)δ{x}(e) ([T(τ)]:回転τの直交マトリックス)した後、δ{x'}(e)に対する{l, a, h}の変化は、Fig.2に示す回転効果等を考えて

$$\delta g(e) = [Qx^I(g)](e) \delta \{x'\}(e),$$

$$[Qx^I(g)](e) = \begin{bmatrix} -1, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0 \\ -1, & -\frac{h}{l}, & 0, & \frac{h}{l}, & 1, & 0 \\ 0, & -\frac{b}{l}, & 0, & -\frac{a}{l}, & 0, & 1 \end{bmatrix} \dots (6, a, b)$$

となり、このδg(e)による変形e(e)の変化は、式(5, a-c)をそのまま微分して

$$\delta e(e) = [Qx^II(g)](e) \delta g(e) \dots\dots\dots (7)$$

の形で得られる。以上の関係を連続させれば、

$$\delta e(e) = [Qx(\{x\})](e) \delta \{x\}(e),$$

$$[Qx(\{x\})](e) = [Qx^II(g)](e) [Qx^I(g)](e) [T](e) =$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{\bar{x}}{l_0 a^2}, & -\frac{\bar{y}}{l_0 a^2}, & \frac{\bar{x}}{l_0 a^2}, & & & \\ \frac{a_0 b_0 \bar{x}}{h_0^2 l_0^2} - \frac{b_0 \hat{x}}{h_0^2 l_0}, & \frac{a_0 b_0 \bar{y}}{h_0^2 l_0^2} - \frac{b_0 \hat{y}}{h_0^2 l_0}, & \frac{a_0^2 \bar{x}}{h_0^2 l_0^2} - \frac{a_0 \hat{x}}{h_0^2 l_0}, & & & \\ (a_0 - b_0) \frac{\bar{x} - \hat{x}}{h_0 l_0 a^2}, & (a_0 - b_0) \frac{\bar{y} - \hat{y}}{h_0 l_0 a^2}, & -\frac{2a_0}{h_0 l_0 a^2} \bar{x} + \frac{\hat{x}}{h_0 l_0 a}, & & & \\ & & & \frac{\bar{y}}{l_0 a^2}, & 0, & 0 \\ \frac{a_0^2 \bar{y}}{h_0^2 l_0^2} - \frac{a_0 \hat{y}}{h_0^2 l_0}, & -\frac{a_0 \bar{x}}{h_0^2 l_0} + \frac{\hat{x}}{h_0^2 l_0}, & -\frac{a_0 \bar{y}}{h_0^2 l_0} + \frac{\hat{y}}{h_0^2 l_0}, & & & \\ -\frac{2a_0 \bar{y}}{h_0 l_0 a^2} + \frac{\hat{y}}{h_0 l_0 a}, & \frac{\bar{x}}{h_0 l_0 a}, & \frac{\bar{y}}{h_0 l_0 a}, & & & \end{bmatrix} \dots\dots\dots (8, a, b)$$

が得られる。

3. 変形力-変形関係—弾性有限ひずみを考えるものとし、ひずみエネルギー-密度関数A(ε)は既知とする。変形e(e)に対してひずみエネルギーのもとに共

役な力成分を**変形力** $f_{(e)} = \{f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}\}$ とすれば、
 $f_{\xi\xi} = V_0 \frac{\partial A}{\partial e_{\xi\xi}}, f_{\eta\eta} = V_0 \frac{\partial A}{\partial e_{\eta\eta}}, f_{\xi\eta} = V_0 \frac{\partial A}{\partial \gamma_{\xi\eta}} \dots (9, a-c)$
 と表わされる。ただし、 V_0 は要素の初期体積。

4. **要素力-変形力関係** 全節点力の $\{x, y\}$ 方向成分 $\{F\}_{(e)}$ は、要素位置 $\{x\}_{(e)}$ に共役であり、**要素力**と呼ぶ。前述の自由度の分離に対して Fig. 3 に示す単純支持を対応させることができる。すなわち、その支持を空間で固定すれば、剛体位置 $\{x_i, y_i, \tau\}$ は固定されるが、その可動な自由度により任意の変形 $\{e_{\xi\xi}, e_{\eta\eta}, \gamma_{\xi\eta}\}$ (形状 $\{l, a, h\}$) が表現できる。

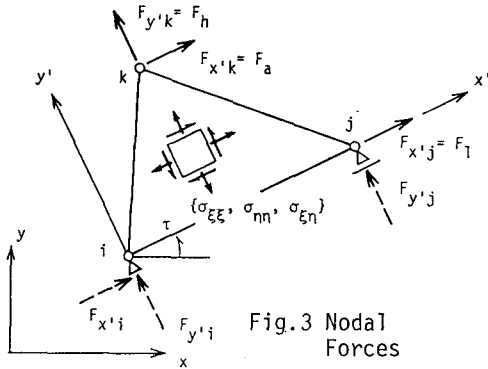


Fig.3 Nodal Forces

単純支持を固定した上で、変形力 $f_{(e)}$ に応ずる $g_{(e)} = \{l, a, h\}$ 方向の節点力成分 $G_{(e)} = \{F_l, F_a, F_h\}$ は、仮想仕事の式 $f_{(e)} \cdot \delta \epsilon_{(e)} = G_{(e)} \cdot \delta g_{(e)}$ に式(7)を代入することにより

$$G_{(e)} = [Q^g]_{(e)} f_{(e)}, \quad [Q^g]_{(e)} = [Q^g]_{(e)}^T \dots (10, a, b)$$

で得られる。要素座標方向の全節点力成分 $\{F'\}_{(e)}$ を考えると、明かに $F_{x'j} = F_l, F_{x'k} = F_a, F_{y'k} = F_h$ であり、他の成分は変形後の剛体的つり合い条件、すなわち単純支持での反力として求められ

$$\{F'\}_{(e)} = [Q^f]_{(e)} G_{(e)} \dots (11, a)$$

となるが、この $[Q^f]_{(e)}$ は式(6. b)の $[Q^x]_{(e)}$ と反傾関係:

$$[Q^f]_{(e)} = [Q^x]_{(e)}^T \dots (11, b)$$

にあることが確認できる。この $\{F'\}_{(e)}$ を $-\tau$ だけ回転変換すれば、要素力 $\{F\}_{(e)}$ が得られる。

以上の力の変換を連続させて、変形力 $f_{(e)}$ に対する要素力 $\{F\}_{(e)}$ が得られる:

$$\begin{aligned} \{F\}_{(e)} &= [Q_f]_{(e)} \cdot f_{(e)}, \\ [Q_f]_{(e)} &= [T(\tau)]_{(e)}^T [Q^x]_{(e)}^T [Q^g]_{(e)}^T \\ &= [Q_x]_{(e)}^T \dots (12, a, b) \end{aligned}$$

5. **接線剛性** 要素力-要素位置間の接線剛性を見る。式(12)を要素位置 $\{x\}_{(e)}$ に関して微分して

$$\delta \{F\}_{(e)} = [Q_f]_{(e)} \delta f_{(e)} + (\delta [Q_f]_{(e)}) f_{(e)} = \dots = [k_M]_{(e)} \delta \{x\}_{(e)} + [k_G]_{(e)} \delta \{x\}_{(e)} \dots (13)$$

の形への展開を考える。第1項の変形剛性は、式(9

. a-c)の微分と式(8)を連続されば

$$\begin{aligned} [k_M]_{(e)} &= [Q_f]_{(e)} [k(\{x\})]_{(e)} [k(\epsilon)]_{(e)} [Q_x]_{(e)} [k(\{x\})]_{(e)}, \\ [k(\epsilon)]_{(e)} &= V_0 \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon} \left\langle \frac{\partial A(\epsilon)}{\partial \epsilon} \right\rangle^T \right]_{(e)} \dots (14, a, b) \end{aligned}$$

の形で得られる。第2項の幾何剛性 $[k_G]_{(e)}$ については、一般形¹⁾として

$$[k_G]_{(e)} = \left[\frac{\partial}{\partial \{x\}} \left\langle \frac{\partial (\epsilon \cdot f)}{\partial \{x\}} \right\rangle^T \right]_{(e)} \Big|_{f_{(e)} = \text{const.}} \dots (15)$$

と表わせる。記号 $\left. \right|_{f_{(e)} = \text{const.}}$ は、微分に関して定数とみなすことを意味する。具体的には式(8. b)の各行を列に転置した後、 $\{x\}_{(e)}$ で微分して得られる3つのマトリックスに、各 $f_{\xi\xi}, f_{\eta\eta}, f_{\xi\eta}$ を乗じて加え合わせれば、次のように得られる:

$$\begin{aligned} [k_G(f, \{x\})]_{(e)} &= \\ V_0 \sigma_{\xi\xi} & \begin{bmatrix} \frac{1}{l_0^2} & 0 & -\frac{1}{l_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{l_0^2} & 0 & -\frac{1}{l_0^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{l_0^2} & 0 & 0 & 0 \\ \text{Sym.} & & & \frac{1}{l_0^2} & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \\ + V_0 \sigma_{\eta\eta} & \begin{bmatrix} \left(\frac{b_0}{h_0 l_0}\right)^2 & 0 & \frac{a_0 b_0}{(h_0 l_0)^2} & 0 & \frac{-b_0}{h_0^2 l_0} & 0 \\ 0 & \left(\frac{b_0}{h_0 l_0}\right)^2 & 0 & \frac{a_0 b_0}{(h_0 l_0)^2} & 0 & \frac{-b_0}{h_0^2 l_0} \\ 0 & 0 & \left(\frac{a_0}{h_0 l_0}\right)^2 & 0 & \frac{-a_0}{h_0^2 l_0} & 0 \\ \text{Sym.} & & & \left(\frac{a_0}{h_0 l_0}\right)^2 & 0 & \frac{-a_0}{h_0^2 l_0} \\ & & & & \frac{1}{h_0^2} & 0 \\ & & & & & \frac{1}{h_0^2} \end{bmatrix} \\ + V_0 \sigma_{\xi\eta} & \begin{bmatrix} \frac{2b_0}{h_0 l_0^2} & 0 & \frac{(a_0 - b_0)}{h_0 l_0^2} & 0 & \frac{-1}{h_0 l_0} & 0 \\ 0 & \frac{2b_0}{h_0 l_0^2} & \frac{(a_0 - b_0)}{h_0 l_0^2} & 0 & \frac{-1}{h_0 l_0} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2a_0}{h_0 l_0^2} & 0 & \frac{1}{h_0 l_0} & 0 \\ \text{Sym.} & & & \frac{-2a_0}{h_0 l_0^2} & 0 & \frac{1}{h_0 l_0} \\ & & & & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \dots (16) \end{aligned}$$

<参考文献> 1) 阿井・西野: "離散化系の幾何学的非線形問題での力学的関係と平面骨組への適用," 土木学会論文報告集, NO. 304, PP. 17-32, 1980-12.