

# I-358 弾塑性体の応力計算に関する一考察

東京大学 正員 山口栄輝

## 1. はじめに

弾塑性体の挙動は変形履歴に依存するため、応力とひずみの関係はそれらの速度(変化率)についてのみ与えられる。このため、応力状態を求めるには何らかの数値計算が必要となる。これは基本的に初期値問題であり、従来より数値計算の分野ではその解法として、オイラー法やルンゲ・クッタ法が知られている。これらはいわゆる陽解法に属するものである。またこれとは別に陰解法もあり、弾塑性体の応力計算ではリターン・マッピング法が提案され、活発な研究活動が行われている<sup>1)</sup>。陽解法では応力速度とひずみ速度が線形関係にあるのに対し、陰解法ではこの関係が非線形となる。このため、陰解法では一般に繰り返し計算が必要となる。

本研究では、数値解法として、オイラー(EU)法、4次のルンゲ・クッタ(RK)法、リターン・マッピング(RM)法を取り上げ、例題を解くことによりこれらを比較する。以下では、紙面の都合上、RM法についてのみ説明する。

## 2. リターン・マッピング法

ある状態での応力を $\sigma_{ij}^0$ 、ひずみを $\epsilon_{ij}^0$ とし、ひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ij}$ が与えられたときの応力増分を求め、応力状態を更新することを考える。RM法では、まず弾性挙動を仮定し、応力を次のように更新する。

$$\sigma_{ij}^* = \sigma_{ij}^0 + D_{ijkl} \Delta \epsilon_{kl} \quad (1)$$

ここに、 $D_{ijkl}$ は弾性テンソルである。 $\Delta \epsilon_{ij}$ が弾性挙動に対応していれば、 $\sigma_{ij}^*$ がそのまま求める応力となる。しかし、 $\Delta \epsilon_{ij}$ が塑性ひずみ成分を含んでいれば、 $\sigma_{ij}^*$ を修正する必要がある。この修正応力は塑性ひずみ増分に対応しており、次式で与えられる。

$$\Delta \sigma_{ij} = -D_{ijkl} \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \quad (2)$$

ここに、 $g$ は塑性ポテンシャル、 $\Delta \lambda$ は塑性ひずみの大きさを定める正のスカラー量で、未知である。ここでは、硬化塑性材料を考えるため、 $\Delta \lambda$ の代わりに相当塑性ひずみ増分 $\Delta \epsilon_p$ を用いて式(2)を書き改めることもできる。 $g$ を修正後の状態で評価するため、式(2)は非線形方程式であり、降伏関数 $f$ が0という条件をさらに課すことにより、これらの増分量(修正量)を求めることとなる。

等硬化化則および関連流動則に従うドロッカー・ブラガー材料の場合、 $\Delta \sigma_{ij}$ を消去することができ、 $\Delta \epsilon_p$ に関する1つの非線形方程式が誘導される。ミーゼス材料の場合、この式はさらに簡略化され、次のようになる。

$$J_2^* - (k(\epsilon_p^* + \Delta \epsilon_p) + \sqrt{3}G\Delta \epsilon_p)^2 = 0 \quad (3)$$

ここに、 $k$ は相当塑性ひずみの関数であり、硬化の程度を表している。また $G$ はせん断弾性係数である。

## 3. 数値計算例

一軸引張応力下における応力 $\sigma$ 、塑性ひずみ $\epsilon^p$ の関係が $\sigma = 100 + 1000(\epsilon^p + 0.01)^{1/2}$ (MPa)で表され、弾性係数 $E = 200$ GPa、ポアソン比 $\nu = 0.25$ であるミーゼス材料を考える。ある状態Aにおいて、この材料に作用する主応力が $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = (400, 400, 200)$ (MPa)、また主ひずみが $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) = (1.25, 1.25, 0.0) \times 10^{-3}$ であり、次の状態Bで主ひずみが $(2.5, 0.625, 0.0) \times 10^{-3}$ に変化したと仮定し、この状態Bにおける主応力、相当塑性ひずみを3つの数値解法で計算する。なお、この材料の場合、式(3)は2次方程式に帰着するため、 $\Delta \epsilon_p$ は繰り返し計算を行うことなく、厳密に求められる。

この計算における誤差は、AからBに変形する際のひずみ増分 $\Delta \epsilon_{ij}$ を細かく分割すれば減少する。分割数を $n$ とし、その逆数と誤差の関係を図示したのが図-1である。 $n$ を大きくして行くと、計算結果はある値

に収束する。ここでは、 $n$ を50にとりRK法で求めた解を収束解とし、それをもとに誤差を算定している。応力成分により誤差の大きさが異なるため、図-1には、大きな誤差を含む応力成分に関する結果を示している。この図より、RK法の精度が最も良く、RM法、EU法の順に精度が低下することがわかる。また、RM法および

EU法では、誤差はほぼ $1/n$ に比例して減少するにすぎず、収束速度はRK法よりはるかに劣っている。

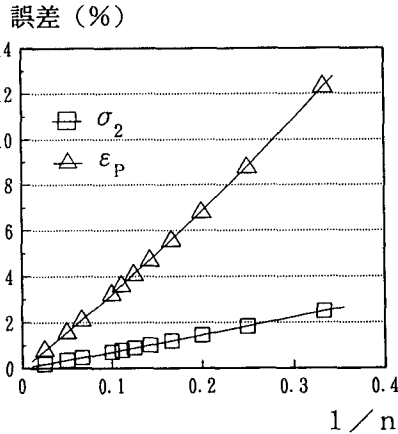
弾塑性挙動をする場合、応力は常に降伏曲面上に位置するため、 $f=0$ を満たす必要がある。しかし、RM法以外、この条件を厳密に課すことはなく、誤差のため、 $f \neq 0$ となる。この誤差の大きさを見るため、無次元量 $\Delta = (J_2/k)^{1/2} - 1$ を定義し、その値を図-2に示している。図-1,2より明らかのように、 $\Delta$ の値は応力、相当塑性ひずみの誤差と強い相関性を有しており、計算結果の誤差を示す指標になると考えられる。このため、 $\Delta$ の値に応じて分割数を調節すれば、誤差を制御することも可能であると思われる。

4. おわりに

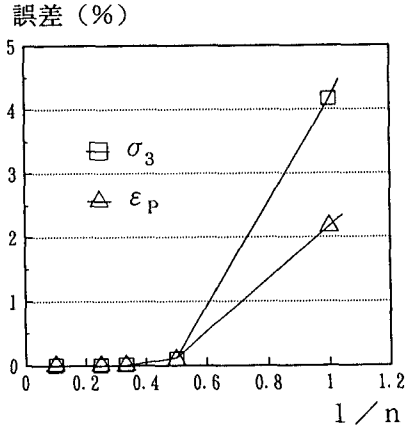
RK法は、EU法に比べると4倍程度の計算量が必要となる。しかし、同じ精度の解を得るのに、分割数はEU法の1/4以下で済み、全体としての計算量は少なくなる。またRM法は、上記例題のように比較的単純な材料の場合には少ない計算量となる。完全塑性体の場合、計算量はさらに減少する。精度に関しても、EU法よりは優れている。またここでの計算例では明確でないが、RM法は非常に安定なアルゴリズムとなっており、これも利点の一つである。しかしながら、収束速度が良くないこと、また材料によっては繰り返し計算が必要となり、計算量がかなり増加することを考えれば、RM法がRK法より特に優れているとは思われない。またRK法の場合には、先に定義した $\Delta$ により、誤差の目安が得られる点も利点になる。以上の点を考慮すれば、どの数値解法を採用するかについては個々の問題の特性に応じて議論する余地はあるものの、この3つの解法の内では、一般にRK法が最良であると思われる。

参考文献

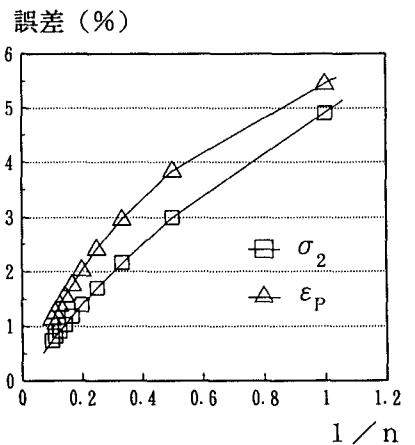
- 1) O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor: The Finite Element Method, 4th Edn., Vol.2, McGraw-Hill, 1991.



(a) EU法



(b) RK法



(c) RM法

図-1 数値計算誤差

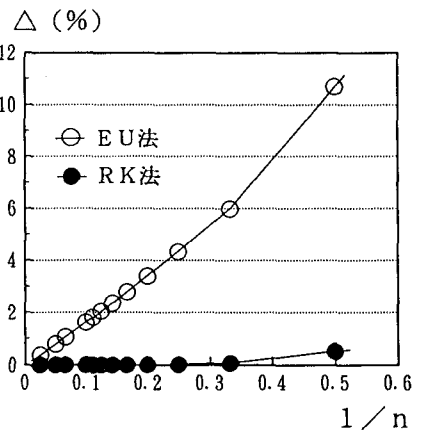


図-2  $\Delta$ 値