

新 潟 県 正員 重野 宏紀  
 長岡技術科学大学 正員 林 正  
 長岡技術科学大学 正員 岩崎 英治

1. まえがき

FEM によるシェル構造解析において、曲面シェル理論に基づくシェル要素の定式化はかなり煩雑になるが、アイソパラメトリックシェル要素は定式化が比較的簡便なために、有限変位解析への拡張も容易である。

しかし、このような要素を用いるとロッキング現象が起こるために低減積分が必要となるが、低減積分を行うと、剛体変位モード以外の特異モードが発生するために解析不能となる場合がある。そこで、ひずみ成分ごとに求まる剛性行列に対して積分点数を選択し、低減積分により剛性行列が特異にならないような混合型の変分原理に基づいたひずみ仮定によるシェル要素が提案されている<sup>1)</sup>。本報告では、この選択的積分法に、さらに精度の高い幾何剛性行列を用いたシェル構造の有限変位解析を示す。

2. アイソパラメトリックシェル要素

定式化における仮定を次に示す。

- 1) 微小ひずみ有限変位問題を解析の対象とする。
- 2) シェル中央面上の並進変位と断面の面外回転は独立に扱う。

本報告では、1 節点 5 自由度の 9 節点アイソパラメトリック要素を用いる。このシェル要素の増分形の平衡方程式を次のように表わすことができる。

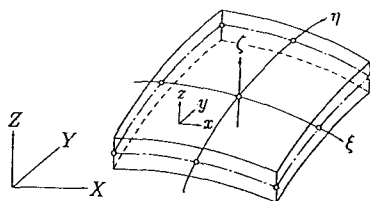


図-1 9 節点シェル要素

$$\sum_{\ell=1}^9 (k_{k\ell}^L + k_{k\ell}^N) \Delta d_{\ell} = \Delta P_k + (P_k - f_k) \dots \dots \dots (1)$$

ここに、 $\Delta d_{\ell}$  は節点変位の増分、 $(P_k + \Delta P_k)$  は荷重の等価節点力ベクトルである。また、 $k_{k\ell}^L$ 、 $k_{k\ell}^N$  はそれぞれ節点  $k$ 、 $\ell$  に関する線形および幾何剛性行列であり、 $f_k$  は既に生じている応力に対する節点  $k$  の等価節点力である。これらは、次式によって表わされる。

$$k_{k\ell}^L = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \int_V E_{ij} b_{ik} b_{j\ell}^T dV, \quad k_{k\ell}^N = \sum_{i=1}^5 \int_V \sigma_i B_{ik\ell} dV, \quad f_k = \sum_{i=1}^5 \int_V \sigma_i b_{ik} dV \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 $E_{ij}$  は弾性マトリックスの  $(i, j)$  要素、 $b_{ik}$ 、 $B_{ik\ell}$  等は座標変数に関するひずみベクトルと行列である。

3. ひずみ成分による選択的積分法

選択的積分を行うために、通常のアイソパラメトリック要素の線形及び幾何剛性行列と断面力ベクトルを、ひずみ成分によりそれぞれ 3 つの行列とベクトルに分け、ガウス積分において図-2 に示す積分点を用いる。ここに、 $\epsilon_1$  は  $\xi$  方向ひずみ、 $\epsilon_2$  は  $\eta$  方向ひずみ、 $\epsilon_3$  は面内せん断ひずみ、 $\epsilon_4$  は  $\xi$ - $\zeta$  面外せん断ひずみ、 $\epsilon_5$  は  $\eta$ - $\zeta$  面外せん断ひずみを表わし、3 つの行列とベクトルはそれぞれ  $\epsilon_1^2$ 、 $\epsilon_4^2$  によるひずみエネルギー、 $\epsilon_2^2$ 、 $\epsilon_5^2$  によるひずみエネルギー、 $\epsilon_1 \times \epsilon_2$ 、 $\epsilon_3^2$  によるひずみエネルギーから求められる。

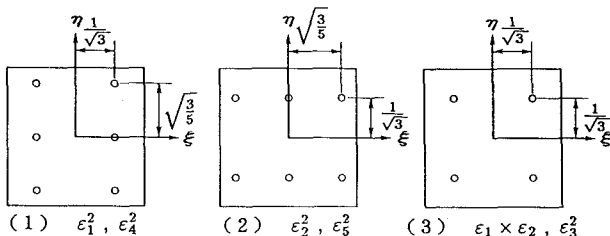


図-2 ガウス積分における積分点

以上の積分点の採り方により剛性をひずみ成分ごとに 3 つの成分に分けると次のように表わされる。

$$k_{k\ell}^L = k_{k\ell}^{L1} + k_{k\ell}^{L2} + k_{k\ell}^{L3}, \quad k_{k\ell}^N = k_{k\ell}^{N1} + k_{k\ell}^{N2} + k_{k\ell}^{N3}, \quad f_k = f_k^1 + f_k^2 + f_k^3 \dots \dots \dots (3)$$

ここに、右肩添字 1, 2, 3 はそれぞれ 図-2 (1), (2), (3) に対応している。このような積分点の採り方により、剛性行列には剛体変位モード以外の特異モードが現れない。

4. 数値計算例

(1) 線形解析

a) 先端に放物線荷重が作用する片持ちばり

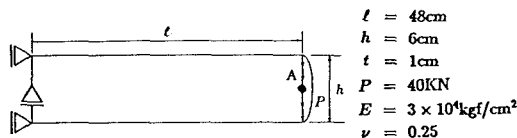


図-3 放物線荷重が作用する片持ちばり

表-1 積分方法による誤差(%)

Elements	Exact	Reduced	Proposed
1	-13.44	—	0.20
2	-17.11	—	0.22
4	0.11	—	0.25

図-3に示すような片持ちばりの解析を行う。この計算例では、境界条件として剛体変位モードに関する3自由度のみを拘束しているために、通常低減積分を用いると剛性行列が特異となり解析できない。

表-1に、解析解に対する相対誤差を示す。厳密積分を行った場合には要素数を多くしなければ精度のよい解が得られないが、本方法では精度よく解析できることがわかる。

b) 等分布荷重が作用する円筒シェル

膜ロッキングが卓越する問題として、図-4に示すような等分布荷重が作用する円筒シェルの解析を行う。図より、厳密積分による結果と低減積分および本方法による結果を比較すると、本方法と低減積分による方がはるかによい精度が得られている。ここで、 $\gamma$ -method<sup>2)</sup>は特異モードが現れないように技巧的な剛性を加えた要素である。

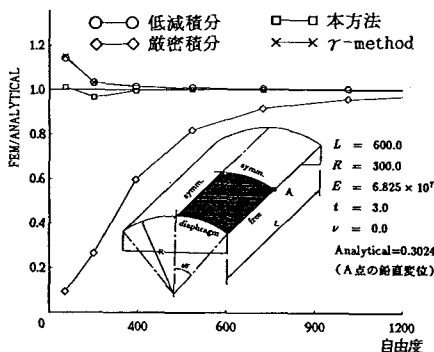


図-4 等分布荷重が作用する円筒シェル

(2) 有限変位解析

a) エラスティカ

大変形時における高曲率状態に対しての妥当性を確認する問題として、自由端に集中荷重Pが作用するエラスティカを計算する。図-5に示すように、5要素を用いた計算結果は楕円積分解に一致しており、厳密積分による結果と比べて、低減積分と本方法では非常に高い精度で解析できる。

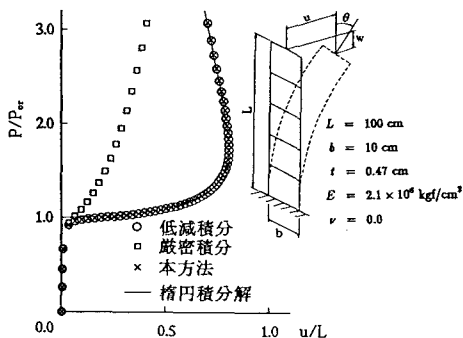


図-5 エラスティカ

b) 集中荷重が作用する円筒シェル

図-6のような集中荷重を受ける円筒シェルの有限変位解析を、4分の1領域を4分割にして計算する。低減積分法と本方法の解はよく一致している。

5. あとがき

ひずみ成分ごとに低減積分することにより、ロッキングと特異性が現れない汎用性のあるアイソパラメトリックシェル要素を開発し、従来の低減積分法と同等かそれ以上の精度を得られることを確認した。

- 1) H. C. Huang and E. Hinton: A New Nine Node Degenerated Shell Element with Enhanced Membrane and Shear Interpolation, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.22, pp.73~92, 1986.
- 2) T. Belytschko, H. Stolarski, W. K. Liu, N. Carpenter and J. S. -J. Ong: Stress Projection for Membrane and Shear Locking in Shell Finite Elements, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., 51, pp.221~258, 1985.
- 3) P. G. Bergan, G. Horrigmoe, B. Krakeland and T. H. Soreide: Solution Techniques for Non-Linear Finite Element Problems, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol.12, pp.1677~1696, 1978.

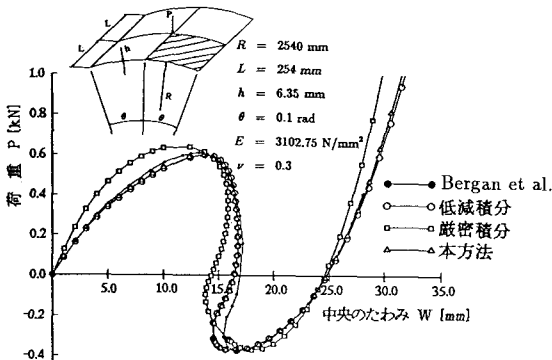


図-6 集中荷重が作用する円筒シェル