

I-352

ルンゲ・クッタ法に基づく弾塑性有限要素解析法

東京大学 ○学生員 湊 高広
 東京大学 正員 山口 栄輝
 東京大学 正員 堀井 秀之

1 はじめに

弾塑性体の構成則は、応力速度とひずみ速度の関係式で表される。このため、有限要素法で弾塑性境界値問題を解く場合、荷重速度と節点速度の関係を表す方程式を解く問題に帰着する¹⁾。これはいわゆる初期値問題で、その数値解法としてはオイラー法がよく知られており、弾塑性有限要素解析に適用されることも多い。しかし、オイラー法は打ち切り誤差が大きいと、荷重増分をかなり小さくしない限り満足のゆく解は得られない。このため、全荷重下でのつり合い式を満たすように反復計算を行う方法が提案され、収束解を得るための効率良いアルゴリズム開発等の研究が活発に行われている²⁾。しかしながら、弾塑性体の挙動は変形履歴に依存するため、全荷重下でのつり合い条件を満たすことは必要条件にすぎず、反復法を用いた場合でも、精度良い解を得るためには、荷重増分を小さくすることが必須の条件となる。こうしたことを考えれば、結局、通常の初期値問題が高精度で解ける数値解法を、弾塑性有限要素解析に適用するのが最も妥当なアプローチであると思われる。以上の点に鑑み、本研究では、有限要素法とルンゲ・クッタ法を組み合わせた手法を提案し、弾塑性解析を行う。

2 解析手法

本研究では、ルンゲ・クッタ法のなかで最も一般的な4次公式を用いる。ルンゲ・クッタ4次公式では常微分方程式

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

に対して、区間 $[x_0, x_0 + h]$ を代表する変化率を求めるため、変化率の計算を4回行う。1回目は初期状態 (x_0, y_0) での変化率 y'_1 、2回目は $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{y'_1}{2}h)$ での変化率 y'_2 、3回目は $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{y'_2}{2}h)$ での変化率 y'_3 、4回目は $(x_0 + h, y_0 + y'_3h)$ での変化率 y'_4 を求め、これら4つの変化率を用いて、この区間の変化率 y'_0 を次式で計算する³⁾。

$$y'_0 = \frac{y'_1 + 2y'_2 + 2y'_3 + y'_4}{6} \tag{2}$$

この y'_0 に h を乗ずることにより、 x の増分量 h に対する y の増分量を求めることになる。

弾塑性問題を有限要素法により離散化すると、場の変数の変化率に関する式が次のように得られる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{K}^{-1}\dot{\mathbf{F}} \\ \dot{\sigma} &= \mathbf{P}\dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\epsilon}_p &= \mathbf{Q}\dot{\mathbf{U}} \end{aligned} \tag{3}$$

ここに、 \mathbf{K} 、 \mathbf{P} 、 \mathbf{Q} は応力状態および変形履歴に依存する行列であり、 $\dot{\mathbf{U}}$ は節点速度ベクトル、 $\dot{\sigma}$ は応力速度ベクトル、 $\dot{\epsilon}_p$ は相当塑性ひずみ速度ベクトルである。これらのベクトル量に対しても式(2)のルンゲ・クッタ公式は適用可能であり、これにより応力、変位等が求められる。

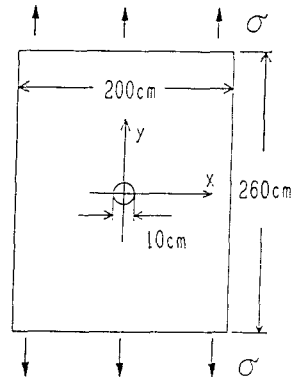


図-1 円孔を有する板

3 計算例

一様引張り応力下にある、円孔を有する板の解析を行った(図-1)。材料は、図-2に示す直線硬化則に従うミーゼス材料とし、弾性係数 E を196000MPa、降伏応力 σ_s を196MPa、ポアソン比を0.3と仮定した。解析で用いた要素数は224であり、円孔周辺の要素分割については図-3に示している。

荷重増分を $\Delta\sigma=1\text{MPa}$ としてルンゲ・クッタ法により解析し、得られた点A(図-3)での y 軸方向変位を図-4に \diamond で示している。さらに、いくつかの荷重増分値を用いてオイラー法でも計算を行い、結果を図-4に実線で示している。(図中、 h の値は荷重増分 $\Delta\sigma$ と比例関係にあり、 $h=1.0$ が $\Delta\sigma=1\text{MPa}$ 、 $h=0.5$ が $\Delta\sigma=0.5\text{MPa}$ 等を意味している。)この図から明らかなように、荷重増分が小さくなるにつれ計算結果は収束し、 $h=0.1$ と $h=0.01$ の計算結果に殆ど差は見られない。このため、 $h=0.01$ の結果をこの問題の解と見なすことができる。また図-4より、ルンゲ・クッタ法による計算結果はこの解と良く一致していることがわかる。 x 軸に沿った要素の重心位置における y 軸方向直応力 σ_y の分布を図-5に示している。ここでも、ルンゲ・クッタ法の計算結果は、 $h=0.01$ を用いたオイラー法の解と良く一致している。

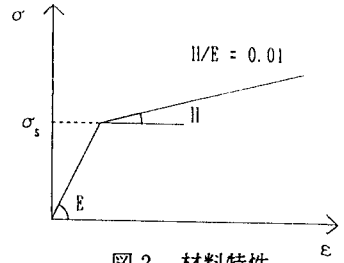


図-2 材料特性

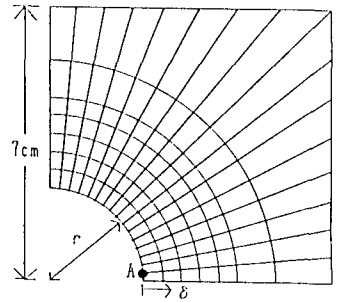


図-3 円孔付近の要素

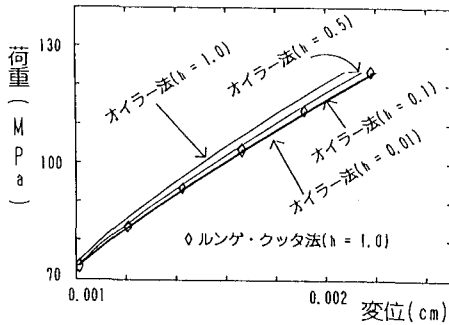


図-4 荷重-変位曲線

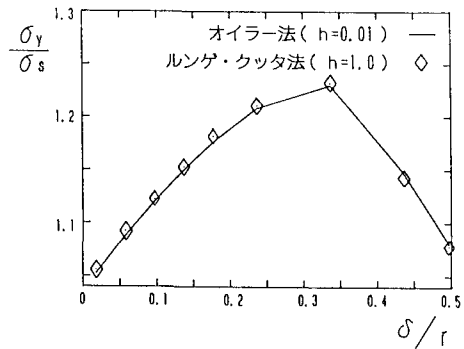


図-5 y 方向直応力の分布

4 まとめ

本研究では、有限要素法とルンゲ・クッタ法を組み合わせた弾塑性数値解析法を提案した。計算例として有孔板の解析を行ったが、比較的大きな荷重増分にもかかわらず、得られた結果はオイラー法の収束解と良く一致しており、本解析法の有効性、妥当性が検証された。

参考文献

- [1] 北川 浩：塑性力学の基礎、日刊工業新聞社、1979年。
- [2] Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. : The Finite Element Method, Vol.2, McGraw-Hill, 1991.
- [3] 土木学会編：土木工学における数値計算、サイエンス社、1974年。