

I-350

3次元空間の六面体分割に関する一考察

岡山大学大学院 学生員 ○岩崎 和也

岡山大学工学部 正員 谷口 健男

1. はじめに

有限要素法・境界要素法などの数値解析において、モデルの設定は対象領域が3次元問題であってもこれを2次元にモデル化し、2次元問題として扱うことが多いがその適用範囲が限定されることより、できれば3次元解析を行なうことが望ましい。そこで、3次元体についても2次元同様に要素自動分割が必要であり、その要素の形状としては、計算時間の短縮・解の精度の向上といった観点から四面体より六面体が望ましい。本研究では、三次元体の六面体要素自動分割の基礎的研究として、空間の六面体要素自動生成法を提案する。

2. 3次元空間の六面体分割における基本的な考え方

いま、何らかの方法を用いて3次元部分空間が六面体を用いて隙間なく分割できたとしよう。その内部に位置する任意の1個の六面体を取り出してみると、次の事実が得られる。

1. その六面体は凸である。
2. 六面体の個々の面は必ず別の六面体との共有面である。
3. 六面体の個々の稜線は、他の複数個の六面体との共有の稜線であって、その稜線周りはこれらの六面体で必ず覆われている。
4. 六面体の個々の頂点は、他の複数個の六面体との共有の点であって、その頂点周りはこれらの六面体で隙間なく覆われている。

ここで、上記4つの項目を満足させる方法を考えてみる。

いま、1個の六面体を考えたとき、まずその六面体を1個の球でもって近似する。六面体には、上の考察で示したように6個の面、12本の稜線、8個の頂点があるから6個の面をそれぞれ共有するように、新たに6個の球を作る。12本の稜線を隙間なく覆う形に球を適切な個数発生させ、それぞれの球に対して1個づつ六面体を作る。同様にして、8個の頂点を全て覆い尽くすように球を、そして発生させたそれぞれの球に対して1個づつ六面体を発生させる。

上に述べた方法は、六面体が立方体あるいは直方体の場合必ず成立することは明らかであり、ある程度歪んだ六面体に対しても適用可能と考えられる。

3. アルゴリズムの設計

(1) 初期状態の設定

3次元空間のなかに1個の凸な六面体を設定する。凸な六面体を認識する情報として、要素-節点関係、要素-面関係、面-節点関係、面-辺関係、辺-点関係、節点のX, Y, Zの座標値、面が六面体で覆われているかどうかを区別する配列を設定する。

(2) 開いた(六面体に覆われていない)面(i)の探査

開いた面の中でも、最も古い面(i)を探す。(図1参照)最も古い面から六面体を生成すれば、生成される六面体は同心円状に広がり自動分割が容易になる。

(3) 面(i)に隣接する開いた4つの面($k_1 \sim k_4$)の探査

六面体の1面である四辺形は、4辺を持つために明かに隣接面は4面ありそれら4つの面を拾いだす。

(4) 球生成数の設定

面(i)と隣接面($k_1 \sim k_4$)との交角を求め、それらの間に設定すべき球(球から六面体が生成される)数を決める。設定すべき球数は以下のように決める。

$$\theta_i < 120^\circ \cdots 1 \text{個} \quad 120^\circ \leq \theta_i < 210^\circ \cdots 2 \text{個}$$

$$210^\circ \leq \theta_i < 300^\circ \dots 3 \text{個} \quad 300^\circ \leq \theta_i \dots 4 \text{個}$$

(5) 球の生成

(4) に従い、面 (i) から隣接面 ($k_1 \sim k_4$) にかけて球を生成する。最初の球は面 (i) を覆い、最後の球は隣接面 ($k_1 \sim k_4$) を覆うように、球を設定する。

5-1 面 (i) 上の球の決定

a) 交角が 120° 未満を満足する隣接面がある場合

いま、覆われるべき面 (i) とそれに隣接する面全ての辺の平均長 (a) を求めると、半径 r は次のように求められる。(図2参照)

$$r = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) a$$

また、球の中心 (O) は、面 (i) の重心から上へ $a/2$ の位置に設定する。

b) 全ての隣接面が交角 120° 以上を満足する場合

いま、覆われるべき平面 (i) の4辺の平均長 (a) を求める。以下、上と同様にして求める。

5-2 隣接面 ($k_1 \sim k_4$) 上の球の決定

上と同様にして、求める。

5-3 面 (i) - 隣接面 k ($k_1 \sim k_4$) 間の球の決定 (図3参照)

i および k の球の半径を線形補間する形で球を決める。

(6) 球に対して六面体を生成

(5) で求められた各々の球に対して六面体を決定する。相隣り合う2個の球の共通部分に対して一つの面を決めなければならない。この面の設定位置は交角を等分する位置とする。また、球上に点を置くことで点発生を行ない、既存の点を生かして六面体を生成する。球上に点を発生させる方法としては、以下のようにする。

- ・ 交角を等分する面と面の交線と球との交点
- ・ 3点でできる角度の角の2等分線と球との交点

この段階では、球の数だけ六面体が生成されそれらは面 (i) とその4辺を覆い尽くす。(図4参照)

(7) 面 (i) の各頂点を覆う六面体の生成 (図5参照)

面 (i) の各頂点が六面体で覆われているかどうか調べ、覆われていない頂点があれば、球を発生し六面体を生成させることで頂点を覆う。覆われていない頂点を持つ開いた面を探索する。この面数は、通常3または4面あると考えられ、3面の場合には1点を、4面の場合には3点を発生させ六面体を生成する。(図6参照) その他の場合、その面数に応じて点発生させ六面体を作る。

以上のステップにより、面、その4辺と4点が六面体で覆われることになる。そして、このステップを繰り返すことにより3次元空間を埋める六面体が生成されると考える。

4. おわりに

上に示したアルゴリズムを用いると、六面体を順次生成し3次元空間を隙間なく埋め尽くせることが確認できた。この目的の為に、上記アルゴリズム中には、様々なパラメーターを導入しており例えば、ステップ(4)における稜線周りに発生させる球の数、ステップ(7)における頂点を覆う球の数がそれぞれであるが、このパラメーターは利用者によって決めることができ、それによって六面体の形状は変化する。

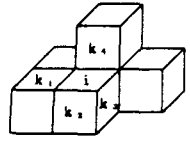


図1

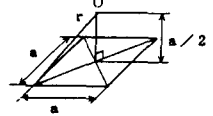


図2

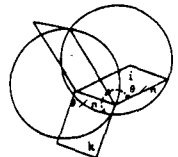


図3

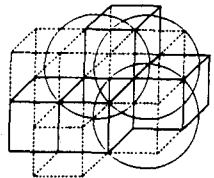


図4

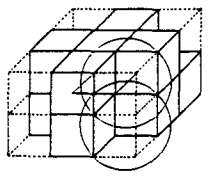
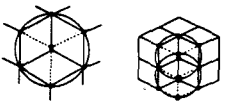


図5



3面の場合 4面の場合
図6