

I-347 有限要素法の事後誤差評価に関する一検討

武蔵工業大学 学生員 永田 考  
 武蔵工業大学 正 員 増田陳紀  
 住友セメント 浜野圭介

1. はじめに

有限要素法は、構造工学の分野だけでなく様々な分野でも利用されており、線形解析ではモデル化が妥当なものならば解の信頼性は高いといわれている。しかし、適切なモデル化を行うには、ある程度の経験が必要とし、これが不足する場合には様々な困難を生じることになる。また、得られた解についても物理的に妥当かどうかを判断するためには、それなりの知識が必要となる。これらの問題を解決する一つの手法として順応型有限要素法などで用いられている計算結果に基づく事後誤差評価を利用することが考えられる。

本研究では、Kellyの理論<sup>1)</sup>に沿って理論解の存在する問題を通して有限要素法の事後誤差評価を行い、この理論の適用性を検討する。具体的な例題として、集中荷重を受ける円盤を考え、三角形一次要素(CST要素)を用いて解析する。

Kellyによると、誤差は有限要素法で得られた解から力のつり合いに関する残差および応力の不連続量を求め、それらを再び有限要素法の入力データとすると出力として求められる。

2. 応力の不連続量の定義

応力の不連続量は、要素間に現われるものと外部境界と要素の間に現われるものの2通りが考えられる(図-1参照)。要素間の応力の不連続量評価に関しては、隣合う要素境界で左側の要素番号が小さくなるように要素境界の方向を決める。要素 $\alpha$ 、 $\beta$ の応力テンソル $\hat{\sigma}^\alpha$ と $\hat{\sigma}^\beta$ との差に外向き単位法線ベクトル $n$ をかけたものが要素 $\alpha$ と $\beta$ との間の応力不連続ベクトル $\rho^{\alpha\beta}$ であり次式のようになる。

$$\rho^{\alpha\beta} = (\hat{\sigma}^\alpha - \hat{\sigma}^\beta) n$$

要素と外部境界との間の応力の不連続量 $\rho^{lm}$ は、応力 $\hat{\sigma}^\alpha$ に外向き法線ベクトル $n$ を乗じ、荷重密度ベクトル $q$ を差し引くかたちで表現され、次式のようになる。

$$\rho^{lm} = \hat{\sigma}^\alpha n - q$$

3. 残差の定義

残差 $R_i$ は、次式で定義する。

$$R_i = \hat{\sigma}_{i,j,j} + f_i$$

ここで、 $\hat{\sigma}_{i,j}$ は応力テンソルの成分、 $f_i$ は与えられた単位体積当りの物体力である。なお、 $'j'$ は $x_j$

座標による偏微分( $\frac{\partial}{\partial x_j}$ )を意味する。

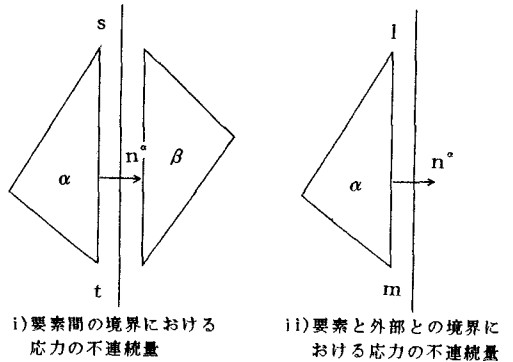


図-1 要素境界

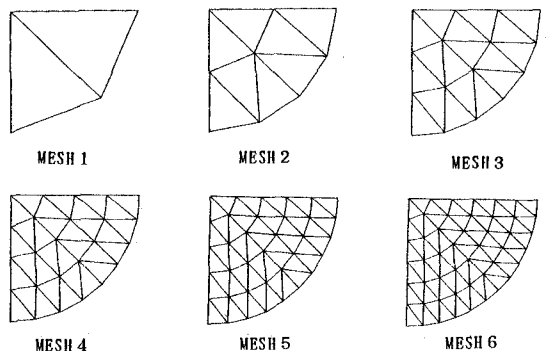


図-2 対向荷重を受ける円盤の要素分割図

4. 解析概要 — 対向荷重を受ける円盤の解析 —

解析対象は、対向集中荷重を受ける円盤とし、対称性を考慮して1/4部分を有限要素の対象部分とする。要素分割は計算結果に及ぼす要素寸法の影響を明確にするために、図-2のように均一分割様式を考える。半径方向に分割数を一つずつ増やし、6つのMESHを解析する。また、拘束境界では応力の不連続量はないものとする。解析諸条件は図-3に示す通りである。

三角形一次要素の場合には、応力の不連続量は要素内で応力が一定となるので隣合う要素の応力の差を境界の長さおよび板厚方向に積分してその結果を両節点に分ける。また残差は、物体力が存在しない領域では自動的につり合い条件が満たされ消滅する。また外部境界で荷重がかかっている所では、応力の不連続量と荷重がつり合っていないなければならない。

5. 解析結果および考察

荷重載荷点では理論解が不定となるので、荷重方向に半径の0.2%内部の点の解を対象として理論解による結果と誤差評価による結果とを比較する。この点での変位の真の誤差と誤差評価による誤差とを比較すると要素寸法の減少とともに図-4のように誤差評価の結果は徐々に真の誤差に接近する。しかし、MESH6においても、実際の誤差の60%程度しか評価されていない、また、真の誤差は要素分割数の増大とともに減少しているのに対して誤差評価による結果は傾向が逆になっている。MESH3の円周上の節点の荷重方向の変位の真の誤差と誤差評価による誤差とを比較すると、図-5のように荷重載荷点以外の点では真の誤差はほぼ0になっているが、誤差評価による結果は真の誤差の急激な変化に追従できず、かなり鈍い評価となっている。ここでは、絶対誤差のみを考慮して検討を行ったが、その範囲内では誤差評価により誤差を精度よく評価するためには要素分割が十分細かいことが必要といえる。

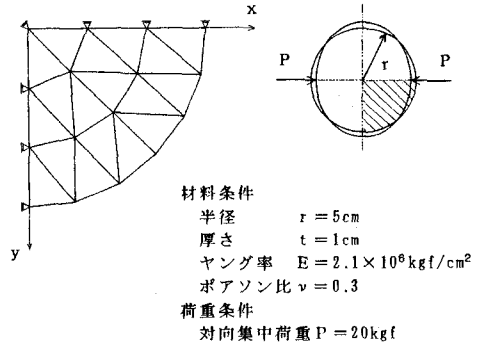


図-3 解析モデル (MESH3)

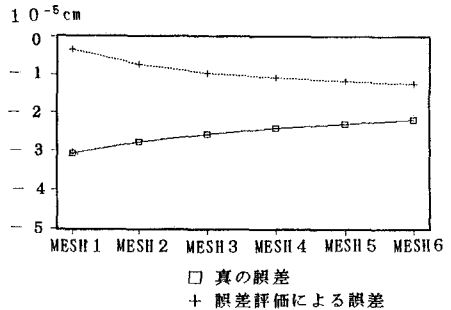


図-4 載荷荷重点における変位の真の誤差と誤差評価による誤差

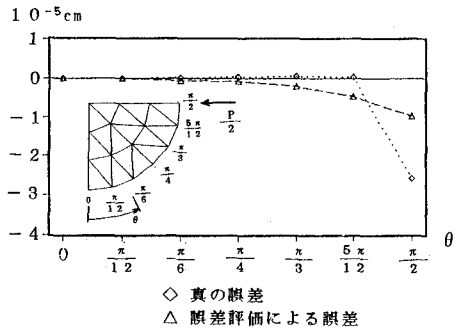


図-5 MESH3の円周上の節点における荷重に平行な変位の真の誤差と誤差評価による誤差

【参考文献】

- 1) Kelly, D.W: The Self-equilibration of Residuals and Complementary a Posteriori Error Estimates in the Finite Element Method, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 20, pp. 1491-1506, 1984.
- 2) 大坪英臣・北村 充: 有限要素法における平面応力問題の誤差評価と応力修正に関する研究, 日本造船学会論文集, No. 165, pp. 225-232, 1989.
- 3) 大坪英臣: 有限要素法の最近の動向(その1), 日本造船学会誌, 第683号, pp. 263-274, 1986.5