I-346　非線形有限要素増分解法の収束計算アルゴリズムに関する検討

東京工業大学工学部　正会員　吉田　裕
東京工業大学大学院　学生会員　○加藤　健治
運　輸　省　黒川　和浩

１．はじめに

有限要素法による非線形解析においては、増分形式で解を解き進めるのが普通であるが、収束計算に多くの時間が費やされることから、収束計算の効率化は重要な課題となる。

本研究は、既往の収束計算法のうち、Newton-Raphson 法、修正 Newton-Raphson法、Crisfieldの加速法、BFGS法を取り上げ、収束性、要する計算時間などについて、比較検討し、相対的な特性を明らかにすることを試みたものである。

２．アルゴリズムの概要

対象とするのは、既に求められた解(n)を出発値として、(n+1)の収束解を求めるための増分ごとの収束計算のアルゴリズムである（図-1）。

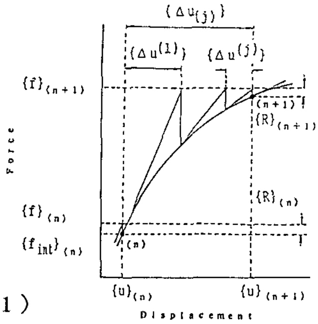

図-1　収束計算の概念図

（１）Newton-Raphson法　（N-R法）

N-R法は、接線剛性マトリックス［K_T］と不つり合い力 $\{R_{(j-1)}\}$ の関係式（式(1)）に基づいて、収束計算過程で更新される変位 $\{u_{(j-1)}\}$ によって毎回［K_T］および｛R｝を書き換えて計算を進める方法である（式(1)）。

$$[K_T(u_{(j-1)})]\{\Delta u^{(j)}\} = \{R_{(j-1)}\} \quad \cdots (1)$$

（２）修正Newton-Raphson法　（M-N-R法）

M-N-R法は、N-R法において１増分計算の出発値(n)で構成される接線剛性マトリックスを、収束計算の過程で書き換えることなく、そのまま使って計算を進める方法である。

（３）Crisfieldの加速法

変位増分ベクトルに係数を乗じることによって割線関係を評価し、M-N-R法の収束を加速する方法である（式(2)）。

$$\{\Delta u^{(j)}\} = e_j\{\Delta u^{(j-1)}\} + f_j\{\Delta \hat{u}^{(j)}\} \quad \cdots (2)$$

（４）BFGS法

Variable Metric法を基礎として割線関係を評価することによって収束性を高めることを意図した方法を、式(3)に示すように、乗算と、出発値で構成される接線剛性マトリックスの解、と乗算で計算を進めることができるようにした方法である。

$$\{d^{(j)}\} = (I+\{w_j\}\langle v_j\rangle)\cdots(I+\{w_1\}\langle v_1\rangle)[K_T^{(0)}]^{-1}$$
$$\times(I+\{v_1\}\langle w_1\rangle)\cdots(I+\{v_j\}\langle w_j\rangle)\{F^{(j)}\} \quad \cdots (3)$$

３．収束計算法の特性を検証するための解析対象について

収束計算法の特性を検証するために、具体的な解析結果を示す。解析対象の一つは２本の部材で構成される山型梁の頂点に鉛直荷重が作用する問題である。対称条件を満たして変形する場合の荷重と荷重作用点の鉛直変位関係を図-2に示す。極大点に至るまでの荷重－変位関係は荷重増分に対して変位増分が漸増するごく普通に現出する曲線である。解析対象のもう一つは、先端に鉛直荷重が作用する片持ち梁の問題である。この場合の荷重と荷重作用点の鉛直変位の関係は図-3に示すように、荷重増分に対して変位増分が漸減する曲線となる。

４．収束計算法の特性

特定の荷重増分のもとでの解析結果ではあるが、山型梁の問題の解析においてそれぞれの収束計算法で収束に要した繰り返し計算回数を図-2中の（）内に並記した。極大点近傍は収束が困難な領域であり、荷重増

分を小さくして解き進めているが、例えば、同じ増分に対して収束に要した繰り返し計算回数がN-R法の5回に対してM-N-R法では、11回の計算を要している場合がある。この場合にCrisfieldの加速法では、５回で収束しており、加速法の意義は明らかである。

この部分の収束計算に要した計算時間（東京工業大学総合情報処理センターのETA-10による）を**表-1**に示す。これをグラフにしたものが**図-4**である。N-R法では毎回接線剛性マトリックスをつくり直し、コレスキー分解を行っているために、2回目以降も1回目と同等の計算時間を要している。これに対しM-N-R法における収束計算の2回目以降は1回目で行ったコレスキー分解をそのまま使うことができるので、前進、後退代入計算だけで済み、M-N-R法での11回の収束計算に要する計算時間はN-R法の5回の約半分である。BFGS法では繰り返し計算が進む毎に要する乗算の回数が増えるので計算時間が少しずつ増えていくことになる。計算効率を収束に要する繰り返し計算回数だけで論ずることができないことは明らかである。

片持ち梁の問題を荷重増分の取り方を変えて解析し、要した収束計算回数、計算時間をまとめたものが表-2である。この問題の場合には、M-N-R法、Crisfieldの加速法では相当小さな増分でなければ収束解を求めることができないのに対し、N-R法、BFGS法では、かなり大きな増分を採っても収束解を求めることができている。また、増分が大きくなる程BFGS法に比べてN-R法の収束性の良さが顕著になることが分かる。

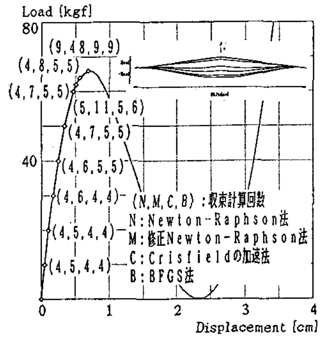

図-2　山型梁の荷重－変位関係

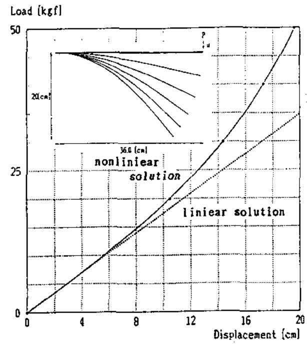

図-3　片持ち梁の荷重－変位関係

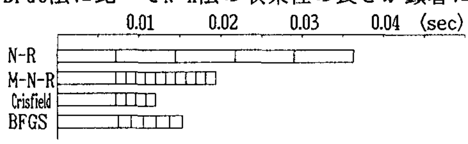

図-4　山型梁の6ステップ目における収束時間

表-1　山型梁の6ステップ目における収束時間

	N-R	M-N-R	Crisfield	BFGS
1	0.00726680	0.00726764	0.00727018	0.00755955
2	0.00726441	0.00121592	0.00122078	0.00154660
3	0.00726873	0.00121592	0.00122334	0.00155301
4	0.00726782	0.00121592	0.00122145	0.00155765
5	0.00726679	0.00121886	0.00122078	0.00157221
6	-	0.00121592	-	0.00158051
7	-	0.00121592	-	-
8	-	0.00121592	-	-
9	-	0.00121592	-	-
10	-	0.00121637	-	-
11	-	0.00121663	-	-
合計 (sec)	0.03633457	0.01943097	0.01215655	0.01536956

表-2　片持ち梁での収束計算回数および計算時間

	荷重増分ΔP [kgf]	解析を行った増分の数	総収束計算回数 (回)	解析に要した計算時間 [sec]
Newton-Raphson法	0.2	250	982	10.153
	2.0	25	105	2.531
	10.0	5	33	1.906
	25.0	2	17	1.773
修正Newton-Raphson法	0.2	250	3529	9.594
Crisfieldの加速法	0.2	250	1590	6.569
BFGS法	0.2	250	1345	6.634
	2.0	25	377	2.722
	10.0	5	228	2.321
	25.0	2	158	2.208

５．おわりに

非線形問題の収束計算法の効率の判断は難しい。広範囲の問題に対して、増分の採り方の巧拙によらず安定に解を求めることを優先することが必要となる汎用システムに適したアルゴリズムという点では、やはり正統的なNewton-Raphson法が最も望ましいと結論することができると考える。

参考文献

1）Crisfield, M. A. :A Faster Modified Newton-Raphson Iteration, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 20, pp. 267～278, 1979.

2）Matthies, H. and Strang, G. :The Solution of Nonlinear Finite Element Equations. Int. Jornal for Numerical Methods Engineering, Vol. 14, pp. 1613～1626, 1979.