I-345 部分修正系スツルム法による固有値解析

佐世保重工業（株） 正員 片山 拓朗
佐世保重工業（株） 正員 宮村 重範
九州東海大学工学部 正員 柏木 光博
熊本大学工学部 正員 平井 一男

１．序

スツルム列の性質を用いた二分法は、各々の固有値の存在範囲を位置付けるので安定である。ここでは、部分的に変更された行列の標準固有値問題に対して有効なスツルム列特性に基づく解法を提案している。提案式は、変更前の次数とは無関係な変更部の次数を持つ圧縮された行列によって表されているので、変更後は全次数についての計算を行う必要はなく、また、変更部の修正量の大きさは任意である。変更前の行列の全固有値と全固有ベクトルを既知とするが、変更後の行列の固有値を確実に与える。変更前の行列の次数が大きく、相対的に変更部の次数が小さく、変更後の行列の固有値を小さい方（あるいは大きい方）からごく少数要求されるような場合に特に有効である。

２．部分修正系スツルム法

対称なｎ×ｎ行列Ａが、Ａ＋ΔＡに変更されたとき、変更後の特性方程式は以下のように書ける。

$$|C| \equiv |A+\Delta A-\lambda I|=0 \tag{1}$$

ここにλは変更後の行列の固有値であり、ΔＡの要素の値の大小は問わない。参考文献にある部分修正系用スツルム法による固有値解析式は

$$f_{\ell}(\lambda)=|\overline{Q}_{\ell}|\prod_{k=1}^{\ell}(\lambda_k-\lambda) \qquad \ell=1,2,\cdots,n \tag{2}$$

である。ここに

$$\overline{Q}_{\ell}=\overline{I}+\overline{\Delta A}\ \overline{G}_{\ell} \tag{3}$$

$\overline{G}_{\ell}$ の i,j 要素 $\overline{G}_{\ell ij}$ は

$$\overline{G}_{\ell ij}=\sum_{k=1}^{\ell}\frac{1}{\lambda_k-\lambda}\ \phi_{ik}\ \phi_{jk} \tag{4}$$

のようになる。ここに λ_k は変更前の行列のｋ番目の固有値を、$\overline{\Delta A}$は部分変更行列を、ϕ_{ik} と ϕ_{jk} は変更前の行列の固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_k$ のｉ番目およびｊ番目の要素をそれぞれに表している。また、マトリクス，ベクトル上の－は、変更部の次数による変更部のマトリクス，ベクトルを意味している。

ここで式(3)中の $|\overline{Q}_{\ell}|$ を前段階 $|\overline{Q}_{\ell-1}|$ の結果を使って簡単に計算することを考える。式(4)より $\overline{G}_{\ell}$ は

$$\overline{G}_{\ell}=\sum_{k=1}^{\ell-1}\frac{\overline{\boldsymbol{\phi}}_k\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_k^T}{\lambda_k-\lambda}+\frac{\overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T}{\lambda_{\ell}-\lambda}=\overline{G}_{\ell-1}+\frac{\overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T}{\lambda_{\ell}-\lambda} \tag{5}$$

となる。よって、式(3)の$\overline{Q}_{\ell}$ は

$$\begin{aligned}\overline{Q}_{\ell}&=\overline{I}+\overline{\Delta A}\ [\overline{G}_{\ell-1}+\frac{\overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T}{\lambda_{\ell}-\lambda}]=\overline{Q}_{\ell-1}+\frac{1}{\lambda_{\ell}-\lambda}\ \overline{\Delta A}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T\\&=[\overline{I}+\frac{1}{\lambda_{\ell}-\lambda}\ \overline{\Delta A}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T\ \overline{Q}_{\ell-1}^{-1}]\ \overline{Q}_{\ell-1}\end{aligned} \tag{6}$$

ここに、$\overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}$は$\boldsymbol{\phi}_{\ell}$中の各要素より変更部分に対応する要素のみを取り出したベクトルである。ここで、式(6)の行列式は

$$|\overline{Q}_{\ell}|=|\overline{I}+\frac{1}{\lambda_{\ell}-\lambda}\ \overline{\Delta A}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}\ \overline{\boldsymbol{\phi}}_{\ell}^T\ \overline{Q}_{\ell-1}^{-1}||\overline{Q}_{\ell-1}|=\alpha_{\ell}\ |\overline{Q}_{\ell-1}| \tag{7}$$

のような漸化式で表せる。ここに、

$$\alpha_\ell = 1 + \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda} \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell^T \overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell \tag{8}$$

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}^{-1} \ \overline{\Delta \mathbf{A}} \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell \tag{9}$$

である。また、$\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{-1}$も

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{-1} = [\overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1} + \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda} \overline{\Delta \mathbf{A}} \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell^T \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell]^{-1} = [\overline{\mathbf{I}} - \frac{1}{\alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda)} \overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell^T] \ \overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}^{-1} \tag{10}$$

のような漸化式として示されるので、逆マトリクスの計算を行うことなく、$\overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}^{-1}$より$\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{-1}$が順次得られる。

初期値（$\ell=0$）は、式(2)より

$$\overline{\mathbf{Q}}_0 = \overline{\mathbf{I}} \tag{11}$$

である。よって

$$|\overline{\mathbf{Q}}_0| = 1 \tag{12}$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_0^{-1} = \overline{\mathbf{I}} \tag{13}$$

あるλにおける式(2)の符号の変化の数は｜Ｃ｜のそれに等しいといえる。このことを利用すれば、スツレム列特性により、ある区間における固有値の個数を計算できる。

ここで、式(2)の$f_\ell(\lambda)$を

$$f_\ell(\lambda) = \frac{|\overline{\mathbf{Q}}_\ell| \prod_{k=1}^{\ell} (\lambda_k - \lambda)}{|\overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}| \prod_{k=1}^{\ell-1} (\lambda_k - \lambda)} = \alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda) \tag{14}$$

のようにおいて、このf_ℓに関する符号を調べるようにすると良い。

以下に、あるλに対する提案法のアルゴリズムの一例を示す。必要とするデータは、変更前の行列の全固有値と全固有ベクトル、部分変更縮小行列（$\overline{\Delta \mathbf{A}}$）および変更要素の行および列位置である。

① $\overline{\mathbf{Q}}_0^{-1} = \overline{\mathbf{I}}$ とおく。

② $\ell = 1 \sim n$に対して

$$\overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell = \overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}^{-1} \ \overline{\Delta \mathbf{A}} \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell \tag{15}$$

$$\alpha_\ell = 1 + \frac{1}{\lambda_\ell - \lambda} \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell^T \overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell \tag{16}$$

$$f_\ell = \alpha_\ell (\lambda_\ell - \lambda) \tag{17}$$

$$\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{-1} = [\overline{\mathbf{I}} - \frac{1}{f_\ell} \overline{\boldsymbol{\psi}}_\ell \ \overline{\boldsymbol{\phi}}_\ell^T] \ \overline{\mathbf{Q}}_{\ell-1}^{-1} \tag{18}$$

を求める。負になるf_ℓの個数をカウントすると、λより小さな固有値の個数になる。ただし、$\overline{\mathbf{Q}}_\ell^{-1}$、$\overline{\Delta \mathbf{A}}$は$m \times m$の行列である。

３． 結び

提案された方法はスツルム列特性に基づいた固有値を求める解法であり、元の行列次数とは無関係に圧縮された行列次数による式として示されている。提案のスツルム列があれば、それぞれの固有値の存在範囲を確実に決定でき、不連続な箇所の極近傍の解も精度よく求めることができる。提案式は求める固有値の数が少ないほど、全次数と変更部の次数との差が大きいほど、有効と思われる。

参考文献

Kashiwagi,M.,Hirai,I.,Ohwaki,S., and Pilkey, W.D.,:Stable Eigensolution of Locally Modified Systems Based on the Sturm Sequence Property, Finite Elementin Analysis and Design,vol.9,pp. 133-139(1991).