I-341 **確率場の条件付きシミュレーションに関する考察**

武蔵工業大学　正員　星谷　勝

1．問題の設定

（1）２次元空間の確率場Ｚ(Ｘ)；Ｘ=(x,y)において、Ｎヶ所でｻﾝﾌﾟﾙ実現値$\underline{Z}$(Ｘi)；i=1～Nが観測されている。これらの観測量を用いて、あるいは既往の先験知識によって、確率場の期待値Ｅ[Ｚ(Ｘ)]=m(Ｘ)は推定されている。故に、Ｚ(Ｘ)は、次のように表せる。

$$Z(X)=m(X)+W(X) \qquad W(X)：確率過程 \tag{1}$$

（２）ｻﾝﾌﾟﾙ実現値$\underline{Z}$(Ｘi)あるいは先験知識により、条件(1)と同様に確率場の特性を表わす共分散関数Ｃ(Ｚ(Ｘr),Ｚ(Ｘs))が推定されている。Ｘr,Ｘsは任意の空間座標である。(1)式より、次のようになる。

$$E[W(X)]=0\ ,\quad C(Z(Xr),Z(Xs))=C(W(Xr),W(Xs))=E[W(Xr)W(Xs)] \tag{2}$$

以上の(1),(2)の条件のもとで、Ｎヶ所の観測点以外の非観測点Ｘrにおけるｻﾝﾌﾟﾙ実現値$\underline{Z}^*$(Ｘr)を既知の$\underline{Z}$(Ｘi)；i=1～Nの線形補間式として予測する方式を誘導する。ただし、Ｘrが観測点Ｘiのいずれかに一致するときは$\underline{Z}^*$(Ｘr)は既知のｻﾝﾌﾟﾙ実現値と一致することが条件となる。(1)式より$\underline{Z}^*$(Ｘr)=m(Ｘr)+$\underline{W}^*$(Ｘr)となるから、以下の節では$\underline{W}^*$(Ｘr)を予測する議論をする。

2．不偏推定かつ最小誤差分散による補間

観測点における確率場Ｗ(Ｘi)；i=1～Nを用いて、非観測点の確率場Ｗ(Ｘr)を次式のように線形補間する。

$$\hat{W}(Xr)=\sum_{i=1}^{N}\lambda i(Xr)W(Xi) \qquad ,\ \lambda i(Xr)：未知関数 \tag{3}$$

(3)式の期待値をとれば、Ｅ[$\hat{W}$(Ｘr)]=Ｅ[Ｗ(Ｘr)]=0を満たすので、(3)式は不偏推定式である。また、未知関数λi(Ｘr)を重みとした平均操作をした形式であるから、(3)式に$\underline{W}$(Ｘi)を代入して求まる$\underline{\hat{W}}$(Ｘr)は本題の$\underline{W}^*$(Ｘr)とは性質の異なるsmoothingされた量である。

さて、Ｗ(Ｘr)との誤差分散値σ^2(Ｘr)=Ｅ[{Ｗ(Ｘr)－$\hat{W}$(Ｘr)}^{2}]を最小とするようにλi(Ｘr)を求めると、

$$C(W(Xr),W(Xm))=\sum_{i=1}^{N}\lambda i(Xr)C(W(Xi),W(Xm)) \qquad ,\ m=1\sim N \tag{4}$$

この連立方程式を解けばλi(Ｘr)は求まる。また、この式を調べると、

$$\lambda i(Xr)=1\ \ ;\ i=r \qquad \lambda i(Xr)=0\ \ ;\ i\neq r \tag{5}$$

(5)式の性質があるので、(3)式においてr=jとおくと、ｻﾝﾌﾟﾙ場では、$\underline{\hat{W}}$(Ｘj)=λj(Ｘj)$\underline{W}$(Ｘj)=$\underline{W}$(Ｘj)となって、観測点Ｘjにおけるｻﾝﾌﾟﾙ実現値と一致する。また(4)式が成立つとき、誤差分散値は次式となる。

$$\sigma^2(Xr)=E[W^2(Xr)]-\sum_{i=1}^{N}\lambda i(Xr)C(W(Xr),W(Xi)) \tag{6}$$

この式は、再び(５)式よりr=iと観測点に一致させるとσ^2(Ｘj)=0となる。以上はすでに基本的な常識であるが、次節のために必要である。

3．条件付シミュレーション

3．1 B.D.Ripley[1]の方式　本題のｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*$(Ｘr)を推定する基本式が教本の中で示されている。

$$W^*(Xr)=\hat{W}(Xr)+\{S(Xr)-\hat{S}(Xr)\} \qquad Xr：非観測点 \tag{7}$$

ここで、$\hat{W}$(Ｘr)=(3)式，Ｓ(Ｘr)はＥ[Ｗ(Ｘr)]=0および共分散関数Ｃ(Ｗ(Ｘr),Ｗ(Ｘs))を満たす確率過程。

$$\hat{S}(Xr)=\sum_{i=1}^{N}\lambda i(Xr)S(Xi) \tag{8}$$

Ｓ(Ｘr)のｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{S}$(Ｘr)を観測点も含み複数点で同時ｼﾐｭﾚｰﾄし、(8)式より$\underline{\hat{S}}$(Ｘr)を求めれば、

$$\underline{W}^*(Xr)=\underline{\hat{W}}(Xr)+\{\underline{S}(Xr)-\underline{\hat{S}}(Xr)\} \tag{9}$$

よりｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*$(Ｘr)が推定される。(7)式の正当性は、① $\hat{W}$(Ｘr)とＳ(Ｘr)は独立である。
② Ｅ[Ｓ(Ｘr)Ｓ(Ｘs)]=Ｅ[Ｗ(Ｘr)Ｗ(Ｘs)],③ 直交性Ｅ[$\hat{W}$(Ｘr){Ｗ(Ｘs)－$\hat{W}$(Ｘs)}]=0の性質を用いて、Ｃ(Ｗ*(Ｘr),Ｗ*(Ｘs))=Ｃ(Ｗ(Ｘr),Ｗ(Ｘs))が成立つことより容認される。

3.2 誤差共分散値を用いる方式（Ⅰ）

$\underline{W}^*(Xr)$を推定する基本式として次式を考える。

$$W^*(Xr)=\hat{W}(Xr)+\{W(Xr)-\hat{W}(Xr)\}=\hat{W}(Xr)+\varepsilon(Xr) \tag{10}$$

$\varepsilon(Xr)$は平均値$E[\varepsilon(Xr)]=0$で分散値は(6)式の$\sigma^2(Xr)$である。この$\varepsilon(Xr)$の性質を調べてみると、(4)式を用いることにより、次の関係が証明される。

$$E[\hat{W}(Xr)\varepsilon(Xr)]=0 \qquad Xr：非観測点 \tag{11}$$

$$E[W(Xj)\varepsilon(Xr)]=0 \qquad Xj：観測点 \quad j=1\sim N \tag{12}$$

(11)式より誤差$\varepsilon(Xr)$は$\hat{W}(Xr)$と独立であり、さらに(12)式より観測点上の$W(Xj)$とも独立であることがわかる。一方、非観測点XrとXsにおける相関を見ると、

$$E[\varepsilon(Xr)\varepsilon(Xs)]=C(W(Xr),W(Xs))-\sum_{i=1}^{N}\lambda i(Xs)C(W(Xr),W(Xi)) \quad ,Xi：観測点 \tag{13}$$

(13)式は(4)式と酷似しているがXsが非観測点であるから、右辺=0とはならない。

複数の非観測点上で$W^*(Xr)$をｼﾐｭﾚｰﾄするためには、(13)式に基づいて$\varepsilon(Xr)$を複数点で同時ｼﾐｭﾚｰﾄすることになる。$\underline{\varepsilon}(Xr)$がｻﾝﾌﾟﾙ実現値として得られれば、(10)式よりｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*(Xr)$が次のように推定される。

$$\underline{W}^*(Xr)=\underline{\hat{W}}(Xr)+\underline{\varepsilon}(Xr) \tag{14}$$

3.3 誤差分散値を用いる方式（Ⅱ）

(11),(12)式が成り立つから、１つの非観測点でｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*(Xr)$を推定するためならば、(13)式に頼る必要はない。$E[\varepsilon(Xr)]=0$，且つ分散$\sigma^2(Xr)$を有する誤差$\varepsilon(Xr)$をｼﾐｭﾚｰﾄする。$\underline{\varepsilon}(Xr)$が得られれば、ｻﾝﾌﾟﾙ場$\underline{W}^*(Xr)$は(14)式で求まる。しかし、ここでは複数点でのｻﾝﾌﾟﾙ場を推定する方式を議論している。そこで、この$\underline{W}^*(Xr)$を既知のｻﾝﾌﾟﾙ実現値$\underline{W}(Xi)$，$i=1\sim N$ に追加し、合計N+1ヶ所でｻﾝﾌﾟﾙ実現値が得られていると考えるのである。これより2節の各式でNの代わりにN+1とすることで、$\hat{W}(Xs)$，$\sigma^2(Xs)$等が求まる。$\varepsilon(Xs)$は(11),(12)式の性質があるから、最初のSTEPと同様に$\underline{\varepsilon}(Xs)$が単独でｼﾐｭﾚｰﾄされ、(14)式より$\underline{W}^*(Xs)$が推定される。以下、順次１つづつｻﾝﾌﾟﾙ実現値の数を増やすことにより、複数の非観測点上でのｻﾝﾌﾟﾙ場を推定することができる。

4．考察と展望

(1) いずれの方式でも、ｻﾝﾌﾟﾙ場の推定値は観測点上ではｻﾝﾌﾟﾙ実現値と一致する。

(2) 3.1節と3.2節の方式はそれぞれ$\underline{S}(Xr)$または$\underline{\varepsilon}(Xr)$の同時ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ(ｺﾚｽｷｰ分解など)が必要であり、個数が増大すると精度上の問題がある。3.1節の方式は$\underline{\hat{S}}(Xr)$を求める必要があるから、同時ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝの次元は3.2節の方式より観測点数Nだけ大きくなる。その意味からは3.2の方式がややよい。

(3) 3.3節の方式は1ｻﾝﾌﾟﾙ場のｼﾐｭﾚｰｼｮﾝを順次行うものであるから、単純であり、数値解析的に安定している。3者では1番よい方式であると思われる。3.2節の方式は$\varepsilon(Xr)$間に空間場の相関を考慮し、3.3節の方式は$\underline{\hat{W}}(Xr)$間に空間場の相関を持たせる点が対照的となっている。

(4) 3.1節の方式はVanmarcke,Fenton[2]，鈴木,石井[3]等が採用しているが、注意すべきことは平均値$m(X)$が未知の場合には3.1節に示す直交性が成り立たないので、一般には(7)式は不適格である。

(5) 本題の議論は時空間の確率場$Z(X,t)$に容易に拡張できる。そして、Fourier変換せず時空間場において誘導できる。故にVanmarcke[2]，盛川,亀田[4]，川上,小野[5]の研究と同一の命題を簡単に解決できる。

(6) 3.3節の方式は1点ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝをもとに拡張することにより、無条件ｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ理論も包含する。

(7) 本論の工学上の応用範囲は広い。

参考文献

1) B.D.Ripley,Spatial Statistics,John Wiley and Sons,1981.
2) E.H.Vanmarcke and G.A.Fenton,Conditional Simulation of Local Fields of Earthquake Ground Motion, Jour. of Structural Safety,Oct,1991,p.247-264.
3) 鈴木誠,石井清,土質定数の空間分布推定法を用いた確率有限要素法,土木学会論文集第394号/Ⅲ-9, 1988年6月,P.97-104.
4) 盛川仁,亀田弘行,既知波形を条件とする確率場のｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ理論に関する基礎的研究,JCOSSAR '91論文集, 1991年,P.137-144.
5) 川上英二,小野牧夫,一地点での観測記録を用いた時空間地震波のｼﾐｭﾚｰｼｮﾝ,土木学会論文集 NO.441/ Ⅰ-18,1992年1月,P.167-175.