Ⅰ-337　ＦＫスペクトルから導かれる相互スペクトルのモデル化に関する一考察

東京大学大学院　学生会員○　中村　博一
東京大学生産技術研究所　正会員　山崎　文雄

１．はじめに　地震動が空間内においてかなり変動することは、アレー観測の結果などから知られている。このような空間的に変動する地震動を表すものとして振動数-波数（ＦＫ）スペクトルがあり、アレー観測記録などからこれが求められれば、サイトを伝播する波群の見かけの速度や到来方向を知ることができる。また、ＦＫスペクトルが振動数および波数に対して連続関数で規定されれば、確率的に時空間で変動する地震動をシミュレーションすることも可能となり、その用途は広い。このようなＦＫスペクトルのモデルとしては、すでに観測記録の統計処理に基づくもの[1) 2)]や、地震学的な考察に基づくもの[3) 4)]が提案されている。そこで本報告では、基本的に前者の立場に立って提案したモデル[5)]を例に、ある振動数における波数スペクトルが卓越する成分を持たなくとも、座標変換した波数軸上で象限対称（quadrant symmetric）が仮定できるならば、その相互スペクトル密度関数は、通常の卓越する成分が存在する場合のものと同一の式で表すことができるということを示す。

２．ＦＫスペクトルと座標変換　時間および二次元空間での確率過程を考え、それが時間および空間でともに定常でエルゴード性を持つと仮定すると、その振動数-波数スペクトルは、次式のように三次元関数として表される。

$$S(\mathbf{k},f) = S_0(f)\,A(\mathbf{k}\mid f) \tag{1}$$

ここで $\mathbf{k} = [k_x, k_y]^T$ は波数ベクトルである。また、$S_0(f)$ は定常地震動のパワースペクトル、$A(\mathbf{k}\mid f)$ は振動数 f における条件付波数スペクトルである。通常、アレー観測記録から求められる振動数-波数スペクトルは、この $A(\mathbf{k}\mid f)$ を波数軸 $\mathbf{k}$ に対してのみプロットしたものである。この $A(\mathbf{k}\mid f)$ の形状は観測点の数が少なかったり、その配置が悪かったりすると安定したものが得られない。また、低振動数では明瞭な唯一のピークが得られるのに対して高振動数ではピークがいくつも現われたりする。しかしここでは、ともかくなんらかの立体が得られ、その立体が直交座標の変換による新しい波数軸に対して面対称になる時を考える。そこで Fig. 1 に示すように、$\mathbf{k}$ を座標変換行列 $\mathbf{T}$ により回転した座標系を $\mathbf{k}^*$、それをさらにベクトル $\mathbf{k}_0^*$ だけ移動した座標系を $\mathbf{k}'$ と考える。

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{T}\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k}^* - \mathbf{k}_0^* = \mathbf{T}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \tag{2}$$

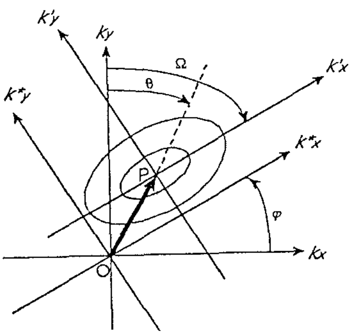
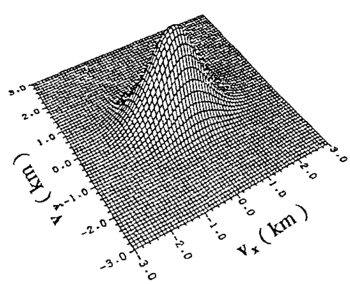


Fig. 1 波数スペクトルモデル



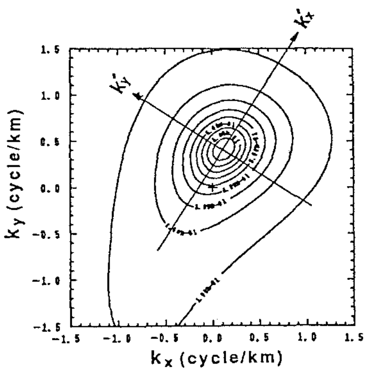
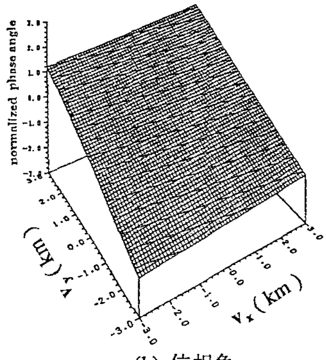
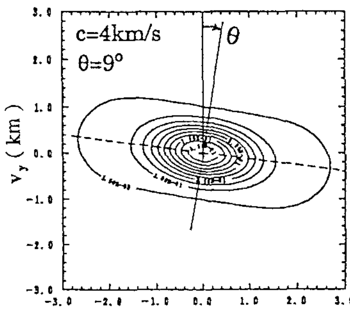


Fig. 2 波数スペクトル

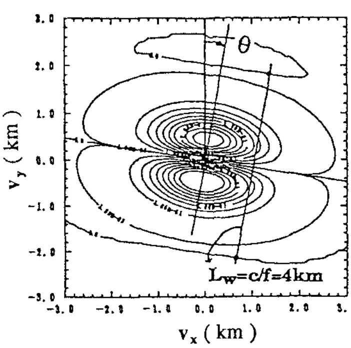


(b) 位相角

Fig. 3 相互スペクトル密度関数



(a) 実部



(b) 虚部

Fig. 4 相互スペクトル密度関数

もとの座標系の原点からこの対称軸の交点への波数ベクトルを $\mathbf{k_0} = f / \mathbf{c_0}$ とすると、$\mathbf{c_0}$ はこの交点からもとの原点へ向かう波の伝播速度と伝播方向とを表すベクトルになる。但し、ここではこの $\mathbf{c_0}$ で表される点がピークである必要はない。従って一般にこの波数スペクトルは、この振動数において、いろいろな方向からくるいろいろな伝播速度を持つ成分波を含んでいてもよいことになる。

３．相互スペクトル密度関数　振動数-波数スペクトルのフーリエ変換にはいろいろなものが考えられるが、ここでは二つの波数軸に対しフーリエ変換を施したものを、相互スペクトル密度関数 $\mathbf{C}(\mathbf{v}, \mathbf{f})$ と呼び、次式で表す。

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{k}} \mathbf{S}(\mathbf{k}, \mathbf{f}) \exp\left(2\pi i\, \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}\right) d\mathbf{k} \tag{3}$$

ここで $\mathbf{v} = [v_x, v_y]^T$ は距離ベクトルである。そして Eq. (1) で仮定した $\mathbf{A}(\mathbf{k} \mid \mathbf{f})$ は、もとの波数軸 $\mathbf{k}$ に対して対称ではない場合に、Eq. (3) のフーリエ変換で求められる 相互スペクトル密度関数は複素関数になる。そこで $\mathbf{k}^*$ 座標系において振動数-波数スペクトル $\mathbf{S}(\mathbf{k}^* - \mathbf{k}_0^*, \mathbf{f})$ を考え、そのフーリエ変換を、その逆変換とともに示す。

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}^*, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{k}^*} \mathbf{S}(\mathbf{k}^* - \mathbf{k}_0^*, \mathbf{f}) \exp\left(2\pi i\, \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{v}^*\right) d\mathbf{k}^* \tag{4}$$

$$\mathbf{S}(\mathbf{k}^* - \mathbf{k}_0^*, \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{v}^*} \mathbf{C}(\mathbf{v}^*, \mathbf{f}) \exp\left(-2\pi i\, \mathbf{k}^* \cdot \mathbf{v}^*\right) d\mathbf{v}^* \tag{5}$$

さらに $\mathbf{k}^*$ と $\mathbf{k}'$ とは平行移動の関係にあるので、Eq. (4) において $\mathbf{v}^* = \mathbf{v}'$ を考慮することにより次式が得られる。

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}', \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{k}'} \mathbf{S}(\mathbf{k}', \mathbf{f}) \exp\left(2\pi i\, \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}'\right) d\mathbf{k}' \times \exp\left(2\pi i\, \mathbf{k}_0^* \cdot \mathbf{v}'\right) \tag{6}$$

この Eq. (6) の右辺第一項は、$\mathbf{k}'$ 座標系での波数スペクトルの二重フーリエ変換であり、

$$\gamma(\mathbf{v}', \mathbf{f}) = \int_{\mathbf{k}'} \mathbf{A}(\mathbf{k}' \mid \mathbf{f}) \exp\left(2\pi i\, \mathbf{k}' \cdot \mathbf{v}'\right) d\mathbf{k}' \tag{7}$$

とおくと、$\mathbf{A}(\mathbf{k}' \mid \mathbf{f})$ は $\mathbf{k}'$ 座標系で象限対称なので、$\gamma(\mathbf{v}', \mathbf{f})$ は実関数となる。また、Eq. (6) の右辺第二項は、$\mathbf{k_0}$ の方向余弦ベクトルを $\mathbf{a_0}$ とすると、次式で表されるような一定速度 $c_0 = |\mathbf{c_0}|$ で伝播する平面波の式となる。

$$\exp\left(2\pi i\, \mathbf{k}_0^* \cdot \mathbf{v}'\right) = \exp\left(2\pi f i\, \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{v}'}{c_0}\right) \tag{8}$$

従って、この場合にも相互スペクトル密度関数は、通常よく用いられるように次式で表されることがわかる。

$$\mathbf{C}(\mathbf{v}', \mathbf{f}) = \mathbf{S}_0(\mathbf{f})\, \gamma(\mathbf{v}', \mathbf{f}) \exp\left(2\pi f i\, \frac{\mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{v}'}{c_0}\right) \tag{9}$$

従って、波数スペクトルが象限対象であると仮定できれば、波群が複数の卓越する伝播速度や方向を持つときにでも Eq. (9) が成り立つことが示された。

４．例題　東京大学生産技術研究所千葉アレーで観測された地震動を用いて、ある振動数帯域で波数スペクトルを計算すると、例えば Fig. 2 が得られる。これを解析的に積分可能な次式の指数関数でモデル化する。

$$\mathbf{A}(\mathbf{k}' \mid \mathbf{f}) = \frac{1}{\pi} \prod_j \alpha_j \exp\left\{ -(\alpha_j k_j')^2 \right\} \tag{10}$$

ここで $\alpha_j, j = x, y$ は長さの次元を持つパラメータで、振動数の関数である。これをフーリエ変換して得られるある振動数における相互スペクトル密度関数 $\mathbf{C}(\mathbf{v}, \mathbf{f})$ は、$S_0(f) = 1.0$ として、Figs. 3 , 4 で表される。Fig. 3 は複素関数をその絶対値と位相角とで表したものだが、いろいろな伝播速度の波を考えているにも関わらず、位相角は一定速度の平面波のものと同じになる。つまり、絶対値が空間相関を、位相角が伝播を表していることがわかる。また、Fig. 4 は同一の関数を実部と虚部とで表したものである。ところで、ここでは高速フーリエ変換を用いて数値的に求めた図を示しているが、Eq. (10) の関数形に対しては、解析的にこれらを求めることができる[5]。

参考文献　1) Harichandran & Vanmarcke : J. of Eng. Mech. , ASCE , Vol. 112 , No. 2 , 1986.
2) Loh : Earthq. Eng. & Struct. Dyn. , Vol. 13 , 561-581 , 1985.
3) Deodatis et al. : J. of Eng. Mech. , ASCE , Vol. 116 , No. 11 , 2363-2379 , 1990.
4) Harada : Computational Stochastic Mechanics, Computational Mechanics Publications, 649-660 , 1991.
5) Yamazaki & Turker : Proc. of the 10th World Conf. on Earthq. Eng. , 1992.