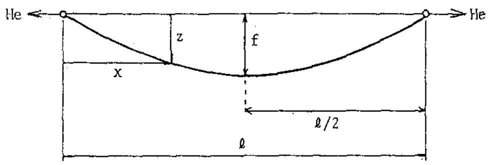
I-220　偏平ケーブルに現われる1/2分数調波共振

長崎大学工学部　学生員　○入 江 省 造
長崎大学工学部　正　員　　髙 橋 和 雄
長崎大学工学部　学生員　　町田健一郎

1．まえがき　ケーブルの非線形応答は、付随型と分岐型に分類され、今日、付随型の振動特性については、ほぼ解明されたと言えよう。また、分岐型の場合、面内加振による応答には、分数調波共振、逆対称分岐応答、面外非線形分岐応答があり、こちらもそれぞれの特性について、既に解明がなされている。ところでサグをもつケーブルの特徴は、振動方程式中に２次の非線形項が含まれることである。したがって、分岐応答の１つである分数調波共振では、対称振動の場合、1/3分数調波共振だけでなく1/2分数調波共振が卓越する。偏平ケーブル(サグ比1/8以下)においては、この1/2分数調波共振の振動特性が、十分に解明されたとは言い難い。また、1/2分数調波共振の近傍には、カオス的振動が生ずることが報告されている[1]。この場合には、解析的な方法では対応できないため、別法による解析が必要である。そこで、本研究では、まず最初に偏平ケーブルの運動方程式を１自由度の振動系にモデル化の後、調和バランス法を用いて、1/2分数調波共振の応答を求める。ついで、微分方程式を直接数値積分することによって時間応答波形を求め、両解を比較し、解析解の存在範囲を明らかにする。

2．運動方程式　図－１に示すような偏平ケーブルが周期的等分布荷重を受ける場合の運動方程式は、Irvineの成書から次式のように与えられる[2]。



図－１　ケーブルの一般図

$$L(w)=m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{8f}{\ell^2}h-(H_e+h)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=p_0\cos\Omega t$$
$$h=\frac{EA}{L_e}\{\frac{8f}{\ell^2}\int_0^\ell w\,dx+\frac{1}{2}\int_0^\ell(\frac{\partial w}{\partial x})^2 dx\} \qquad (1)$$

ここに、w：面内鉛直たわみ、t：時間、m：ケーブルの単位長さあたりの質量、f：ケーブルサグ、ℓ：ケーブルスパン長、h：活荷重水平張力、E：ヤング率、A：断面積、$L_e=\ell(1+8f^2/\ell^2)$：ケーブル長、H_e：初期水平張力、p_0：外力の振幅、Ω：外力の円振動数

3．解法　式(１)の解を１自由度系モデルで、次の変数分離形に仮定する。

$$w=\ell\,T(t)W(x) \qquad (2)$$

ここに、$T(t)$：未知の時間関数、$W(x)$：境界条件を満足する座標関数

上式の座標関数Wとして、自由振動の対称モードを用いる。そこで、式(1)にGalerkin 法を適用し、さらに、粘性減衰力を考慮すると、次式が得られる。

$$\ddot{T}+2h\omega_1\dot{T}+\omega_1^2T+C_2T^2+C_3T^3=C_4\bar{p}_0\cos\bar{\omega}\tau \qquad (3)$$

ここに、$\omega_1=n_1/\pi n_0$：１次の無次元固有円振動数、$n_0=\sqrt{H_e\pi^2/m\ell^2}$：弦の１次の固有円振動数、$n_1$：ケーブルの１次の固有円振動数、$C_2=12\gamma I_bI_cI_d$、$C_3=I_b^2I_d/2$、$C_4=I_c/I_a\pi^2$、$I_a=\int_0^1W^2d\xi$、$I_b=\int_0^1W'^2d\xi$、$I_c=\int_0^1Wd\xi$、$I_d=k^2/(1+8\gamma^2)I_a\pi^2$、$\xi=x/\ell$、$\gamma=f/\ell$：サグ比、$k=\sqrt{EA/H_e}$：縦波-横波伝播速度比、$\bar{p}_0=p_0\ell/H_e$、$\bar{\omega}=\Omega/n_0$、$\tau=n_0t$

1/2分数調波共振を求めるため、まず式(3)の解をFourier級数解析法にもとづき、次式のように仮定する。

$$T=\frac{A_0}{2}+c_{1/2}\cos\frac{\bar{\omega}\tau}{2}+s_{1/2}\sin\frac{\bar{\omega}\tau}{2}+c_1\cos\bar{\omega}\tau+s_1\sin\bar{\omega}\tau$$
$$=A_0/2+A_{1/2}\cos(\bar{\omega}\tau/2-\phi_{1/2})+A_1\cos(\bar{\omega}\tau-\phi_1) \qquad (4)$$

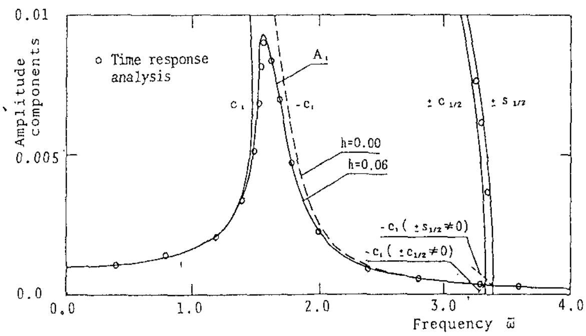
ここに、A_0、$A_1=\sqrt{c_1^2+s_1^2}$、c_1、s_1：付随応答成分、$A_{1/2}=\sqrt{c_{1/2}^2+s_{1/2}^2}$、$c_{1/2}$、$s_{1/2}$：分岐応答成分、$\phi_1=\tan^{-1}(s_1/c_1)$、$\phi_{1/2}=\tan^{-1}(s_{1/2}/c_{1/2})$：位相差

式(4)を式(3)に代入して、調和バランス法を適用すれば、未定定数を求める連立非線形代数方程式を得る。これに Newton-Raphson法を用い、適当な初期値のもとに解けば、必要な解が得られる。

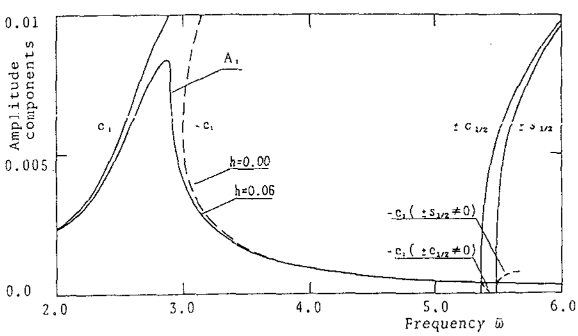
また、式(3)を２元連立の１階常微分方程式に変換し、Runge-Kutta-Gill法を適用して直接数値積分すれば、時間応答波形が得られる。

４．数値結果　図-2、3には、伝播速度比 $k=30$ の偏平ケーブルでサグ比 $\gamma=0.02$、0.05の２ケースについて横軸に無次元加振振動数、縦軸に振幅成分をとり、減衰力がない場合と考慮した場合の主調波応答と1/2分数調波応答を示した。荷重強度は静的応答が1/1000となるように設定してある。$h=0$ の場合、主調波応答 c_1 は、あらゆる振動数領域で生じ、実線が外力と同位相の応答、破線が逆位相の応答を示している。1/2分数調波共振の応答は、固有振動数の２倍の振動数領域でのみ生じる。サグ比 $\gamma=0.02$ の場合、２次の非線形項が支配的な軟化バネ特性を示し、$\gamma=0.05$ の場合、３次の非線形項が支配的な硬化バネ特性を示す。図-2、3において減衰力を考慮すると、主調波応答では振幅が大きい範囲でその効果が大きい。分数調波共振の方は、もっと小さな減衰力で求める。図-4に $\gamma=0.02$ で $h=0.008$ の場合の応答を示した。図-2、3の主調波共振の応答では減衰力の影響は、サグ比と無関係だが、分数調波共振ではサグ比によって影響が異なる。

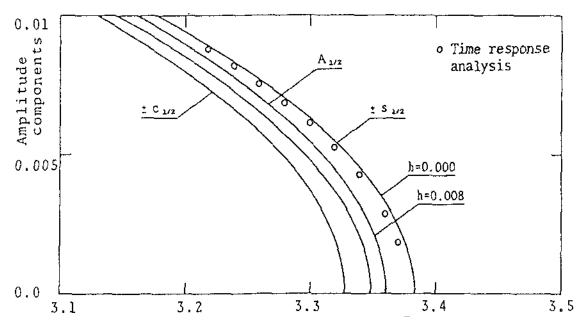
図-2、4には、Runge-Kutta-Gill法より得られた時間応答波形が定常となってからの応答振幅をプロットした。これより、両者はほぼ一致することが確かめられる。



図－２　1/2分数調波共振（$k=30$, $\gamma=0.02$）



図－３　1/2分数調波共振（$k=30$, $\gamma=0.05$）



図－４　1/2分数調波共振（$k=30$, $\gamma=0.02$, h=0.008）

５．まとめ　今回の研究では、偏平ケーブルに現われる1/2分数調波共振特性を明らかにし、数値シミュレーションによる解との比較を行なった。

今後、このシミュレーションによって、1/2分数調波共振近傍のカオス的応答を明らかにしたい。

参考文献　１）Rega,G.Benedettini,F.：Journal of Sound Vibration,Vol.132, No.3,1989, ２）町田・高橋・夏秋：長崎大学工学部研究報告,第22巻,第38号,1992