I－152　直線部材のねじり振動に関する動的剛性マトリックスについて

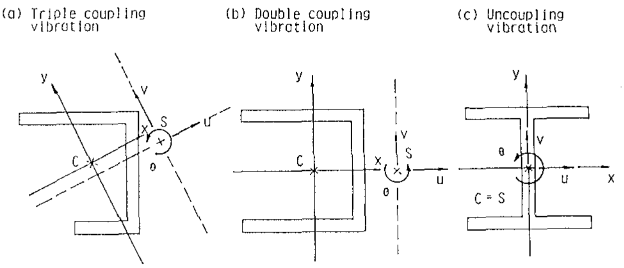
北海道大学工学部　正員　林 川 俊 郎
北海道大学工学部　正員　小 幡 卓 司
北海道大学工学部　正員　平 澤 秀 之

１．まえがき

最近、広い幅員を有する連続高架橋、斜角のきつい方杖ラーメン橋、アーチ橋、曲線格子桁橋等が数多く架設されるようになってきた。橋梁構造形式が長大化、複雑化するにつれて、その固有振動性状はますます複雑になってきている。したがって、この種の３次元的な広がりを持つ橋梁の動的設計には、立体固有振動解析が必要となってくる。

閉じ断面（中実断面）部材より構成された構造物は、軸変形、面内および面外の曲げ変形、St.Venantの純ねじり変形を考慮すれば十分であり、その立体固有振動解析はほぼ体系化されつつある[1]。しかし、図－１に示すような薄肉開き断面部材より構成される構造物の固有振動解析では、曲げねじり変形（そり変形）を無視することはできない。図－１ａのような非対称開断面の場合には、ｘ軸およびｙ軸まわりの曲げ振動が、せん断中心軸Ｓまわりのねじり振動と連成する、いわゆる３重連成振動となる。図－１ｂの１軸対称断面の場合には、ｘ軸またはｙ軸まわりの曲げ振動がねじり振動と連成する２重連成振動となる。図－１ｃの２軸対称断面の場合には、２つの主軸まわりの純曲げ振動と純ねじり振動がお互いに独立した非連成振動となる。

しかしながら、薄肉断面はりのせん断中心軸まわりの曲げねじり振動に関する動的な剛性マトリックス（固有剛性マトリックス）の定式化は、著者らの知る限りにおいて、研究されていないように思われる。そこで、本研究の目的は図－１ｃに示した２軸対称開き断面に着目して、曲げねじり振動の支配方程式の一般解を用いて、固有剛性マトリックスの誘導を行うことである。



図－１　薄肉開断面はりの振動様式

２．曲げねじり変形を考慮した薄肉直線部材の固有剛性マトリックス

ここでは、薄肉直線部材の固有剛性マトリックスの定式化を目的としている。すでに、軸変形、曲げ変形および St. Venantの純ねじり変形を考慮した固有剛性マトリックスは誘導されている[2]。そこで、本研究では曲げねじり振動の基本的な固有剛性マトリックスを誘導することにする。したがって、２軸対称断面について考えると、その支配方程式は次のように簡単になる[3]。

$$EI_w \frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} - GJ\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\gamma A}{g} r_s^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad \cdots\cdots(1)$$

まず、上式(1)の一般解を求める。薄肉直線部材が調和振動するとすれば、固有円振動数をωとおくと、動的なねじり関数$\theta(z,t)$は次のように仮定される。

$$\theta(z,t) = \Theta(z)\exp(i\omega t) \quad \cdots\cdots(2)$$

したがって、式(2)を式(1)に代入すると、一般解$\Theta(z)$は次のように求められる。

$$\Theta(z) = A\cos\mu z + B\sin\mu z + C\cosh\nu z + D\sinh\nu z \quad \cdots\cdots(3)$$

ただし、 $\mu=\sqrt{GJ/2EIw(\lambda-1)}$, $\nu=\sqrt{GJ/2EIw(\lambda+1)}$, $\lambda=\sqrt{1+4mr_s^2EI_w\omega^2/(GJ)^2}$

また、A、B、C、D は積分定数である。任意の点zにおけるねじり角Θ(z)、ねじり率Θ'(z)、ねじりモーメントMz(z)、曲げねじりモーメントMw(z)は、式(3)を用いて表示できる。したがって、z=0 における状態量ベクトル**X**(0)は積分定数ベクトル**C**によって、次のように表される。

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{A}(0)\mathbf{C} \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここで、$\mathbf{X}(0)=\{\Theta(0),\ \Theta'(0),\ Mz(0),\ Mw(0)\}^T$、 $\mathbf{C}=\{A,\ B,\ C,\ D\}^T$ である。

同様にして、z=ℓ における状態量ベクトル**X**(ℓ)は次のように求められる。

$$\mathbf{X}(\ell)=\mathbf{A}(\ell)\mathbf{C} \qquad \cdots\cdots(5)$$

したがって、式(4)、(5)より積分定数ベクトル**C**を消去し、変位および断面力の符号を微分方程式のものから、固有剛性マトリックスのものへ変換すると、最終的に次式を得る。

$$\mathbf{X}=\mathbf{K}(\omega)\mathbf{U} \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここに、$\mathbf{X}=\{Mzi,\ Mwi,\ Mzj,\ Mwj\}^T$、 $\mathbf{U}=\{\Theta zi,\ \Theta wi,\ \Theta zj,\ \Theta wj\}^T$、$\mathbf{K}(\omega)$ は求める固有剛性マトリックスである。この固有剛性マトリックスは固有円振動数ωを含む、４行４列の正方対称マトリックスである。その具体的な要素k_{ij}は次の通りである。

$$k_{11}=(\mu^2+\nu^2)(\nu\cos\mu\ell\sinh\nu\ell+\mu\sin\mu\ell\cosh\nu\ell),\quad k_{13}=-(\mu^2+\nu^2)(\mu\sin\mu\ell+\nu\sinh\nu\ell),$$
$$k_{12}=(\nu^2-\mu^2)(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)-2\mu\nu\sin\mu\ell\sinh\nu\ell,\quad k_{14}=(\mu^2+\nu^2)(\cos\mu\ell-\cosh\nu\ell),$$
$$k_{22}=(\mu^2+\nu^2)(\sin\mu\ell\cosh\nu\ell/\mu-\cos\mu\ell\sinh\nu\ell/\nu),\ k_{24}=-(\mu^2+\nu^2)(\sin\mu\ell/\mu-\sinh\nu\ell/\nu),$$
$$k_{23}=-k_{14},\quad k_{33}=k_{11},\ k_{34}=-k_{12},\ k_{44}=k_{22},$$
$$\alpha=EI_w/\{2(1-\cos\mu\ell\cosh\nu\ell)+(\nu^2-\mu^2)/(\mu\nu)\sin\mu\ell\sinh\nu\ell\} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし、係数αはすべての要素k_{ij} に掛けるものとする。この固有剛性マトリックス**K**(ω)は通常の重ね合わせの原理を適用することができる。境界条件による拘束節点処理を施すと、構造物の固有円振動数ωを求めるための振動数方程式が次のように得られる。

$$\det|\mathbf{K}(\omega)|=0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

上式は、一般的に固有円振動数ωに関する超越方程式となる。固有値ωは Regula-Falsi法により求めることができる。

３．あとがき

本研究では薄肉直線部材の曲げねじり振動に着目して、固有剛性マトリックスを誘導した。したがって、従来のはりの縦振動と横振動に関する固有剛性マトリックスを加味することにより、分布座標系による立体骨組構造物の固有振動解析が可能になるものと考えられる。

（参考文献）

1)Paz, M.:Structural Dynamics, Theory & Computation, Van Nostrand Reinhold Co., 1980.
2)Leung, A. Y.:Fast Convergence Modal Analysis for Continuous Systems, Journal of Sound and Vibration, Vol. 87, pp.449-467, 1983.
3)林川・小幡：薄肉直線部材の固有剛性マトリックスの誘導について、土木学会北海道支部論文報告集、第48号、pp. 61-64、1992.