

川鉄テクノロジクス(株)	正員	○富重健一
長崎大学 工学部	正員	松田 浩
長崎大学 工学部	正員	森田千尋
長崎大学 工学部	正員	崎山 毅

1. まえがき

著者らの一部はこれまで、平板や偏平シェルについて、その基礎微分方程式の積分方程式への変換と積分方程式の近似解法の応用とにより得られる離散的一般解に基づく離散化手法を用いて、面外曲げ解析、振動・座屈などの固有値解析、面内圧縮力を受ける耐荷力解析などを行い、既往の解析結果と比較し本解析手法の妥当性を検討してきた。本研究はその応用として、ライズがあまり高くない偏平シェル構造を対象として、幾何学的非線形性を考慮し、さらに、その材料が弾性限度を超えひずみが弾性成分のほかに塑性成分を含む領域の計算、すなわち、偏平シェルの弾塑性有限変位解析を、先に述べた離散化手法を用いて行ったものである。本解析法は、あらかじめ変位関数を仮定する必要がなく、また、任意の境界条件を持つ場合も容易に解析することができる。

2. 偏平シェルの増分形基礎微分方程式および離散的一般解

曲面の  $x$ 、 $y$  方向の曲率を  $k_x$ 、 $k_y$ 、ねじれ率を  $k_{xy}$  とし、これらがあまり小さくなく、投影形状が矩形の曲面板を考える。せん断力を  $Q_y$ 、 $Q_x$ 、ねじりモーメントを  $M_{xy}$ 、曲げモーメントを  $M_y$ 、 $M_x$ 、たわみ角を  $\theta_y$ 、 $\theta_x$ 、板厚中央面上の  $x$ 、 $y$  方向の面内変位成分を  $u$ 、 $v$  および垂直方向の変位成分を  $w$ 、面内力を  $N_{xy}$ 、 $N_y$ 、 $N_x$  とすれば、せん断変形の影響を考慮した偏平シェルの曲げに関する増分形の基礎微分方程式は次のように表せる。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x = 0 \quad (1-1) \qquad \frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y = 0 \quad (1-2)$$

$$\frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \Delta N_x \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + k_x \right] + \Delta N_y \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + k_y \right] + 2 \Delta N_{xy} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + k_{xy} \right] + N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \Delta q + \Delta N_c = 0 \quad (1-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (1-4) \qquad \frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (1-5)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{11} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{12} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{13} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{11} \Delta e_x + \phi_{12} \Delta e_y + \phi_{13} \Delta e_{xy}) \quad (1-6)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{21} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{22} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{23} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{21} \Delta e_x + \phi_{22} \Delta e_y + \phi_{23} \Delta e_{xy}) \quad (1-7)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\varphi}_{31} \Delta M_x + \bar{\varphi}_{32} \Delta M_y + \bar{\varphi}_{33} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\phi_{31} \Delta e_x + \phi_{32} \Delta e_y + \phi_{33} \Delta e_{xy}) \quad (1-8)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{\Delta Q_x}{\kappa Gh} \quad (1-9) \qquad \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{\Delta Q_y}{\kappa Gh} \quad (1-10)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{11} \Delta N_x + \bar{\psi}_{12} \Delta N_y + \bar{\psi}_{13} \Delta N_{xy}) - h (\psi_{11} \Delta \beta_x + \psi_{12} \Delta \beta_y + \psi_{13} \Delta \beta_{xy}) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - \Delta w_{xc} + k_x \Delta w \quad (1-11)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{21} \Delta N_x + \bar{\psi}_{22} \Delta N_y + \bar{\psi}_{23} \Delta N_{xy}) - h(\bar{\psi}_{21} \Delta \beta_x + \bar{\psi}_{22} \Delta \beta_y + \bar{\psi}_{23} \Delta \beta_{xy}) - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \Delta W_{yc} + k_y \Delta w \quad (1-12)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{31} \Delta N_x + \bar{\psi}_{32} \Delta N_y + \bar{\psi}_{33} \Delta N_{xy}) - h(\bar{\psi}_{31} \Delta \beta_x + \bar{\psi}_{32} \Delta \beta_y + \bar{\psi}_{33} \Delta \beta_{xy}) - \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} - \Delta W_{xc} + 2k_{xy} \Delta w \quad (1-13)$$

ここに、 $q=q(x, y)$ :面に対する垂直方向荷重強度、 $D=D(x, y)=Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ :シェルの曲げ剛度、 $E$ :弾性係数、 $G=E/[2(1+\nu)]$ :せん断弾性係数、 $\kappa=5/6$ :せん断修正係数、 $h=h(x, y)$ :シェル厚、 $F=F(x, y)=Eh/(1-\nu^2)$ :シェルの伸び剛度、 $\nu$ :ポアソン比、 $\Delta$ :断面力および変形量の増分、 $\Delta N_x, \Delta W_{xc}, \Delta W_{yc}, \Delta W_{xyc}$ :各荷重増分段階における不平衡力および非線形項、 $[\bar{\varphi}_{ij}]=[\varphi_{ij}]^{-1}$ ,  $[\bar{\psi}_{ij}]=[\psi_{ij}]^{-1}$ ,  $[\Phi_{ij}]=[\bar{\varphi}_{ij}][\chi_{ij}]$ ,  $[\Psi_{ij}]=[\bar{\psi}_{ij}][\chi_{ij}]$

これらの基礎微分方程式(1-1)~(1-13)において、以下に示す無次元量 $X_1 \sim X_{13}$ および $\eta, \zeta$   
 $X_1=a^2 Q_y/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $X_2=a^2 Q_x/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $X_3=a M_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $X_4=a M_y/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  
 $X_5=a M_x/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $X_6=\theta_y$ ,  $X_7=\theta_x$ ,  $X_8=w/a$ ,  $X_9=v/a$ ,  $X_{10}=u/a$ ,  $X_{11}=a^2 N_{xy}/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  
 $X_{12}=a^2 N_y/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $X_{13}=a^2 N_x/[D_0(1-\nu^2)]$ ,  $\eta=x/a$ ,  $\zeta=y/a$ ,

$a, b$ :偏平シェルの矩形Baseの辺長、 $\mu=b/a$ ,  $h_0$ :基準シェル厚、 $D_0=Eh_0^3/[12(1-\nu^2)]$ :基準シェル剛度を導入し無次元化後、領域 $[i, j]$ において面積分することにより積分方程式に変換し、次に積分方程式の近似解法を応用すると、偏平シェルの縦、横の等分割線の交点に関する離散解 $\Delta X_{pij}(p=1 \sim 13)$ は、次のように整理される。

$$\Delta X_{pij} = \sum_{d=1}^{10} \left( \sum_{k=0}^i a_{pijkd} \cdot \Delta X_{rk0} + \sum_{l=0}^j b_{pijld} \cdot \Delta X_{s0l} \right) + \Delta Q_{pij} \quad (2)$$

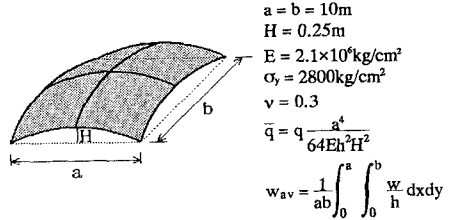


Fig.1 E.P.Shell

この離散的な一般解 $\Delta X_{pij}$ を求める方法の詳細については、文献1)を参照されたい。

### 3. 解析結果

解析上の仮定を、

- [1] 材料は非硬化性である
- [2] 降伏後もMindlinの理論が成り立つ
- [3] 材料はvon-Misesの降伏条件に従う

として、Fig.1に示すような四辺が単純支持された、E.P.シェル(S1:H/h=0.625, S3:H/h=0.781, S5:H/h=1.25)に等分布荷重が満載される場合の、荷重-たわみ曲線をFig.2に示す。なお分割数は、縦、横方向に8分割、板厚方向に20分割とした。

[参考文献]

- 1) 崎山毅・松田浩: 変厚矩形板の曲げの一解析法, 土木論集, 第338号, pp. 21-28, 1983.
- 2) E.Ramm: Geometrisch Nichtlineare Elastostatik und Finite Elemente, Habilitation, Universitat Stuttgart Bericht, Nr. 76-2, 1976.

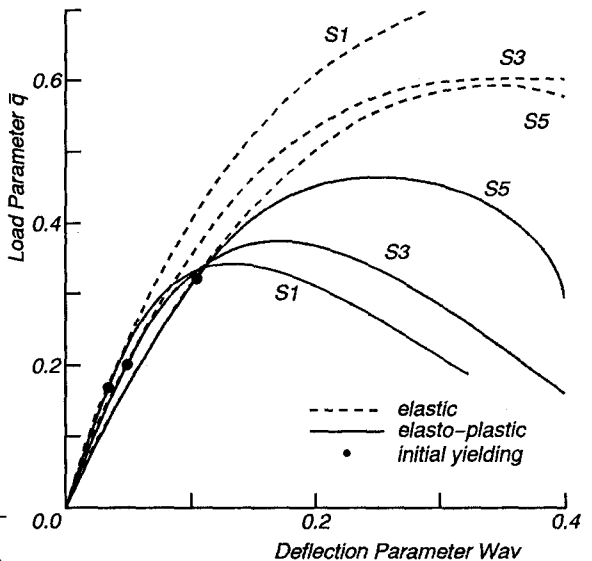


Fig.2 Load-Deflection Curves for E.P.Shell